Национальный институт образования

Факультативные занятия

С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович

Математика

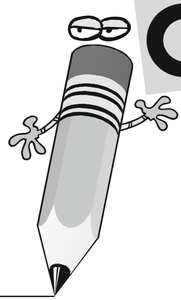
5 класс

Тропинками математики

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание



Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
Г93

Серия основана в 2010 году

Гуцанович, С. А.
Г93 Математика. 5 класс. Тропинками математики : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 128 с.: ил. — (Факультативные занятия).
ISBN 978-985-533-116-3.

Пособие составлено в соответствии с учебной программой факультативного курса. Содержит интересные факты и занимательные задачи, а также знакомит учеников с приемами устных и письменных вычислений.

Предназначено учащимся 5 классов для использования на факультативных занятиях по математике.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Гуцанович Сергей Аркадьевич
Костюкович Наталья Владимировна

МАТЕМАТИКА. 5 КЛАСС
Тропинками математики

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 13.09.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 4,27. Доп. тираж 1500 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-533-116-3

От авторов

Дорогие пятиклассники!

Вам предстоит отправиться с нашими героями в путешествие по различным тропинкам математики. На уроках у вас нет возможности более глубоко и всесторонне рассмотреть изучаемый программный материал, который основывается на многочисленных исторических сведениях по математике. Поэтому на факультативных занятиях в процессе работы над предлагаемыми дидактическими материалами вы сможете узнать интересные факты, ознакомиться с занимательными задачами, ответить на вопросы, выполнить отдельные задания.

На каждой из восьми тропинок вам предстоит сделать несколько остановок. На остановках вместе с нашими героями-одноклассниками Катей Книжкиной, Васей Задачкиным и Петей Вопросовым вы будете рассматривать очередную тему. Катя Книжкина любит читать занимательную литературу по математике. Она по каждой теме факультативного курса подобрала для вас интересный исторический материал. Петя Вопросов любит задавать вопросы. С их помощью вы лучше усвоите материал по теме. А Вася Задачкин очень любит решать задачи, он вместе с авторами придумал для вас многие интересные задачи по темам, а отдельные из них подобрал из книг по занимательной математике, список которых прилагается в методическом пособии.

На факультативных занятиях вспоминайте изученный на уроках математики материал, используйте знания, приобретенные ранее. Занимательная форма подачи материала пособия облегчит процесс его усвоения, позволит использовать полученные сведения при дальнейшем обучении. В отдельных случаях вы можете соглашаться с мнением героев, а в других — отстаивать свою точку зрения. При работе с пособием внимательно ознакомьтесь с дополнительной информаций, предлагаемыми вопросами, выполненными заданиями. Многие задачи будут успешно решены, если вы сделаете схематические рисунки, заполните таблицы.

Поскольку вы увлекаетесь математикой, то для успешного изучения предмета и побед на математических конкурсах и олимпиадах вам необходимо ознакомиться с рекомендуемой литературой. Посещение библиотеки и чтение книг по математике, на которые авторы делают ссылки, помогут при решении задач. Помните, что хорошие знания по математике пригодятся вам при изучении других учебных предметов, будут способствовать принятию верных решений в различных жизненных ситуациях.

Успехов вам в изучении материала факультативных занятий «Тропинками математики»!

Тема 1 Тропинкой в мир чисел и цифр

Занятия 1—3. Цифры и числа. Запись цифр у разных народов. Числа-великаны. Натуральные числа. Некоторые виды натуральных чисел и их свойства. Построение математиками фигурных чисел.

Катя Книжкина: «Сегодня мы тропинкой отправляемся в удивительный мир чисел и цифр. Для каждого из нас не составляет труда записать любое многозначное число, даже если в нем будет очень большое число знаков. Мы записываем любое число с помощью только десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Цифры — это символы, условные знаки для обозначения чисел. Они позволяют записывать различные числа. Сейчас практически все люди на нашей планете используют для записи чисел эти десять цифр. Цифры были изобретены не сразу. Чтобы мы могли пользоваться этой удобной формой записи чисел, человечеству понадобились многие столетия. Предполагают, что первые изображения предшественников наших цифр возникли раньше введения письменности. Первоначально числа изображались с помощью зарубок на деревянных бирках или костях, а позднее — с помощью черточек. Но большие числа изображать таким способом неудобно, поэтому стали применять особые знаки и символы.

В Древнем Египте около 5 тыс. лет назад число 10 обозначали иероглифом ∩ (символ дуги, которую ставили над десятком черточек), число 100 — знаком 𓍢 (символ измерительной веревки) и т. д. Из таких «цифр» составляли десятичную запись любого числа, например число

124 обозначали так: ||∩ ||∩ ϱ, причем читалось число справа налево.

Народы, жившие в Междуречье Тигра и Ефрата в период от II тыс. до нач. н. э., сначала обозначали числа с помощью кругов и полукругов различной величины, а затем стали использовать только два клинописных знака — прямой клин ▼ (1) и лежачий клин ◀ (10). Например, число 23 изображали так: ◀◀▼▼▼. Число 60 снова обозначалось знаком прямой клин (▼), а, например, число 92 записывали так: ▼◀◀◀▼▼ (60 + 30 + 2).

В начале нашей эры индейцы племени майя, жившие на полуострове Юкатан в Центральной Америке, пользовались обозначениями: 1 — точка, 5 — горизонтальная черта, например 14 записывалось так: ····=. В системе счисления майя был знак для нуля, который напоминал полузакрытый глаз.

За несколько столетий до новой эры некоторые народы (древние греки, славяне и другие) начали записывать числа с помощью букв алфавита.

В Древней Греции числа 5, 10, 100, 1000, 10 000 обозначали буквами Г, Δ, Н, Х, М, а число 1 — черточкой. Чтобы отличить цифры от букв, над буквами также ставили черточку».

Петя Вопросов: «Какие еще народы использовали для обозначения чисел буквы?»

Катя Книжкина: «Подобная система обозначения чисел применялась и в Древней Руси, культура которой была тесно связана с культурой Византии. Рассмотрим подробнее славянские цифры. Славянский алфавит был создан монахами Кириллом и Мефодием. В славянской системе нумерации буквы алфавита являлись одновременно и числовыми знаками. Каждая буква обозначала одно и то же число независимо от ее местоположения.

Славянская нумерация использовала 27 букв. Первые 9 букв обозначали числа от 1 до 9, следующие 9 букв обозначали десятки, а последние 9 букв — сотни. Над буквами, обозначавшими числа, ставили специальный знак — титло. Например, число 1 обозначалось $\tilde{А}$, 1000 — ≠ $\tilde{А}$, число 10 000 обозначали А без титла, но обводили кружком. Называлось это число «тьма».

Такой алфавитной нумерацией пользовались до XVII в. Она позволяла записывать очень большие числа и выполнять действия столбиком, как это делаем мы теперь.

Из Древнего Рима дошли до нашего времени следующие числовые знаки:

I	V	X	L	C	D	M
«и»	«вэ»	«икс»	«эль»	«цэ»	«дэ»	«эм»
1	5	10	50	100	500	1000

Одни ученые полагают, что V обозначает раскрытую ладонь, а X — две ладони или скрещенные руки, другие ученые считают, что знак X ведет свое происхождение от двух линий, которыми перечеркивали десяток черточек, а V означает половину от X. О происхождении знаков для ста и тысячи ученые строят лишь догадки. Буквы C и M, возможно, являются просто начальными буквами слов *centum* и *mille*, что в латыни означает «сто» и «тысяча» [18, 44].

Сейчас я покажу, как записывали различные числа древние римляне. Например, запись X означает число 10, запись XXX — число 30. При записи чисел в этой системе используют принципы сложения и вычитания.

Если числовой знак с меньшим значением стоит после знака с бо́льшим значением, то их значения складываются. Например, запись XXI означает число 21, запись LXI — число 61.

Если числовой знак с меньшим значением стоит перед знаком с бо́льшим значением, то из бо́льшего значения вычитается меньшее. Например, запись XIX означает число 19, запись CMXCVIII — число 998.

Римская нумерация удобна для записи чисел, но не приспособлена для вычислений. Никакие действия в письменном виде с римскими цифрами произвести невозможно, и это является ее большим недостатком.

От римлян эта нумерация пришла в Европу и многие азиатские страны и применялась в официальных бумагах вплоть до XVIII в.

Римская нумерация сохранилась до настоящего времени. Ею пользуются для нумерации веков, олимпийских игр, обозначения чисел на циферблате часов, при обозначении глав в книгах и т. д.

В Китае и Японии, как и в Египте, для записи чисел применяли иероглифы».

Петя Вопросов: «Катя, расскажи нам о современных цифрах».

Катя Книжкина: «Для объяснения нынешней формы цифр существует много теорий, которые связывают форму с числом точек, палочек, углов в цифре, но это только догадки. Наши цифры 0, 1, 2, ..., 9 называются арабскими, но арабы только завезли эти цифры в Европу из Индии, поэтому правильнее было бы назвать их индийскими. Прообразы современных цифр возникли примерно 1500 лет назад и в течение многих столетий, переходя от народа к народу, много раз изменялись, и в арабских странах индийские цифры приняли форму, близкую к современной. В VIII в. н. э. арабы вторглись в Европу. Новая индийская нумерация была завезена в X—XII вв., но лишь к началу XIX в. ее стали применять повсеместно. Европейцы переняли у арабов искусство счета, при этом сами цифры со временем немного изменились.

Интересно, что начиная со II в. н. э. греческие астрономы, познакомившись с системой записи чисел вавилонян, стали употреблять символ «0» для обозначения пропущенного разряда. Этот знак стал прообразом нынешнего нуля. Индийцы познакомились с греческой астрономией, нумерацией и нулем между II и IV вв. н. э. Они соединили эти результаты со своей десятичной нумерацией, и это было завершающим шагом в создании нынешней нумерации.

Слово «цифра» происходит от арабского «сыфр», так в VIII в. перевели с индусского слово «шунья», что означало «пустое», т. е. отсутствие разряда. Поэтому до VIII в. нуль, которым мы пользуемся сейчас, называли «цифрой», а в английском языке это слово и в настоящее время означает «нуль». Нынешнее название «нуль» происходит от латинского слова *figyra*, т. е. «никакая цифра».

Числа, при записи которых используется только одна цифра, называются однозначными. Если при записи числа используются две цифры (различные или одинаковые), то число является двузначным, если три цифры — трехзначным и т. д., эти числа называются многозначными».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, почему система счисления, которой мы пользуемся, называется десятеричной позиционной системой счисления?»

К а т я К н и ж к и н а: «Основу нашей системы счисления составляет число 10. Это значит, что десять единиц образуют один десяток, десять десятков — одну сотню и т. д., таким образом, десять единиц младшего разряда образуют одну единицу старшего разряда. При записи чисел крайней справа записывается цифра в разряде единиц, затем цифра в разряде десятков и цифра в разряде сотен, таким образом, мы получаем класс единиц. Следующий класс, состоящий из трех разрядов, — класс тысяч, затем — класс миллионов и т. д. Если единицы какого-то разряда отсутствуют, то в этом разряде записывается 0. Например, в числе 45 608 071 (сорок пять миллионов шестьсот восемь тысяч семьдесят один) отсутствуют единицы в разрядах десятков тысяч и сотен. Кроме десятеричной системы счисления, есть и другие, например двоичная система счисления, в которой используются только две цифры 0 и 1. Эта система применяется в вычислительной технике. Следует отметить, что запись чисел в двоичной системе счисления достаточно громоздка».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, что ты знаешь о числах-великанах?»

К а т я К н и ж к и н а: «Еще в древности математики записывали очень большие числа и придумывали названия для них. Мы уже используем при записи чисел классы единиц, сотен и миллионов, а как называется следующий класс? Запишем число, в котором семь разрядов, например 1 000 000 — один миллион. Термин «миллион» впервые появился в Италии, первое упоминание датируется 1250 г. Допишем справа еще три нуля, получим один миллиард. Слово «миллиард» впервые упоминалось в 1558 г. и использовалось для обозначения числа, в котором за единицей записывалось двенадцать нулей. Сейчас это 1 000 000 000. Дописывая справа по три нуля, мы каждый раз будем получать в числе еще один класс. В разных странах до сих пор одни и те же названия используют для различных по количеству классов чисел, т. е. не существует еще единой системы названий для больших чисел. Например, в Америке и Франции тысяча миллионов (1 000 000 000) — это биллион, или миллиард. В Германии и Англии биллион — это миллион миллионов, т. е. 1 с последующими двенадцатью нулями. Продолжая дописывать по три нуля, математики получали все новые большие числа: квадриллион (1 с пятнадцатью нулями), квинтиллион (1 с восемнадцатью нулями), секстиллион (1 с двадцатью одним нулем), септиллион (1 с двадцатью четырьмя нулями), октиллион (1 с двадцатью семью нулями)... Есть название даже для числа, в котором после единицы записано сто нулей, — это гугол. Человечество продолжает увеличивать разрядность чисел и придумывать им новые названия. Для числа, в котором после единицы записано триста три нуля, тоже есть название — это центиллион.

Со временем люди научились не только называть и обозначать числа, но и выполнять с ними арифметические действия».

Петя Вопросов: «Катя, какие числа называются натуральными?»

Катя Книжкина: «Числа, которые используются при счете, называются натуральными числами. Если эти числа записывать по порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., то получим натуральный ряд чисел.

Натуральные числа — самые древние на Земле. Они появились тогда, когда людям понадобилось сосчитать созданную природой действительность и плоды своего труда, например овец, коз, шкуры животных, плоды и другие предметы и объекты.

Единица — это первое и самое маленькое число натурального ряда, а также одна из цифр в десятичной системе счисления.

Считается, что обозначение единицы любого разряда одним и тем же знаком (довольно близким к современному знаку 1) появилось впервые в Древнем Вавилоне приблизительно за 2 тыс. лет до н. э.

Древние греки, считавшие числами лишь натуральные числа, рассматривали каждое из них как набор единиц. Самой же единице отводилось особое место: она числом не считалась.

Таким образом, уже в те давние времена единица занимала свое особое место среди других чисел.

С единицей связаны следующие соотношения, которые выполняются для любого натурального числа a: $a \cdot 1 = a$, $a : a = 1$, $a : 1 = a$.

В ряду натуральных чисел за единицей следует двойка, затем тройка и т. д. Мы видим, что каждое следующее число на единицу больше предыдущего. В ряду натуральных чисел нет наибольшего числа. Это значит, что какое бы большое натуральное число мы не написали, всегда можно написать следующее за ним. Например, если n — какое-то натуральное число, то следующее за ним натуральное число будет $n + 1$.

Вначале люди пользовались небольшим количеством натуральных чисел, постепенно их число увеличивалось. Долгое время считалось, что в натуральном ряду содержится конечное количество чисел.

Великий ученый Древней Греции Архимед показал в своей книге «Псаммит» (исчисление песчинок), что натуральный ряд чисел не имеет конечного числа, следовательно, его можно постоянно продолжать. В процессе своего развития человечество пришло к пониманию того, что натуральный ряд не имеет конечного числа и, называя или записывая какое-то очень большое число и добавляя единицу, мы получаем число, следующее за ним в натуральном ряду.

В Древней Руси последним числом натурального ряда некоторое время было число 10 000, которое называлось «тьма», затем 1 000 000 000 000 — «тьма тем».

Наряду с развитием представлений о числе, возникали и различные суеверия, связанные с числами. Так, в глубокой древности числу 7 приписывались магические и священные свойства. В Древнем Вавилоне семерка считалась священным числом, затем это почитание перешло к другим народам. До наших дней дошли некоторые поговорки и высказывания, связанные с числом 7:

«Семь раз отмерь, один раз отрежь»,

«Один с сошкой, а семеро с ложкой»,

«Семь пятниц на неделе»,

«Семь бед, один ответ»,

«Семеро одного не ждут»...

В Библии указывается, что бог создал мир за шесть дней, а седьмой день — для отдыха. У древних греков признавалось семь чудес света и семь мудрецов, у римлян считалось, что Рим построен на семи холмах, в России семерка использовалась в знахарстве и заклинаниях.

Число 13 у многих народов является символом неприятностей и несчастий. Это связано с тем, что у предшествующего ему в натуральном ряду числа 12 много делителей (1, 2, 3, 4, 6, 12), и поэтому оно было очень удобным: это число месяцев в году и единиц в дюжине, а в Древнем Вавилоне — основание системы счисления. Следующее за ним в натуральном ряду число 13 имеет только два делителя (1, 13), следовательно, является простым, поэтому числу 12 приписывалось все только положительное, а числу 13 — только несчастья. Так, в Библии указывается о 12 апостолах, а из 13 учеников Христа последний оказался предателем. Во многих государствах отсутствуют дома, квартиры, гостиничные номера под номером 13, не существуют маршруты общественного транспорта с этим номером. Некоторые люди в результате случайных совпадений становятся суеверными в отношении числа 13, но существует много случаев, когда это число приносило удачу».

Контрольные вопросы Пети Вопросова

1. Сколько различных цифр мы используем для написания чисел?

2. Какие числа называются однозначными? Приведите примеры. Назовите самое большое однозначное число.

3. Сколько всего существует однозначных чисел?

4. Сколько понадобится цифр, чтобы записать все однозначные числа?

5. Какие числа называются многозначными? Приведите примеры многозначных чисел.

6. Сколько всего существует двузначных чисел и сколько трехзначных?

7. Сколько понадобится цифр, чтобы записать все двузначные числа?

8. Какая цифра в ряду натуральных чисел стоит на 9-м месте; на 17-м месте; на 25-м месте?

9. Назовите последнюю цифру произведения:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9.$$

10. Сколько понадобится цифр для нумерации 40 страниц книги, начиная с первой?

11. Что больше: сумма всех цифр или их произведение?

12. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 10?

13. Назовите четыре последние цифры в произведении двадцати первых чисел натурального ряда.

14. Сумма каких двух натуральных чисел равна их произведению?

15. В каких странах для записи чисел использовали иероглифы?

16. В каких странах для записи чисел использовали алфавит? Как древние славяне при записи различали буквы и цифры?

17. Какая древняя нумерация, отличная от арабской, используется и в настоящее время?

18. Почему цифры, которыми мы пользуемся, называются арабскими?

19. Можно ли назвать самое большое натуральное число?

20. Сколько разрядов в числе триллион? Назовите классы этого числа.

21. Какие пословицы и поговорки, в которых упоминаются числа, вы знаете?

Упражнения Васи Задачкина

1. Найдите сумму наименьшего двузначного числа и наибольшего.

2. На сколько наименьшее двузначное число меньше наименьшего трехзначного?

3. Используя цифры по одному разу, составьте наибольшее пятизначное число.

4. Используя цифры по одному разу, составьте наименьшее шестизначное число.

5. Назовите классы и разряды в числе 659 834 792. Сколько единиц каждого разряда в этом числе?

6. Не переставляя цифры 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате число 50.

7. Не переставляя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате число 80.

8. Не переставляя цифры 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате число 100.

9. С помощью пяти цифр 2, используя знаки действий и скобки, напишите число 26.

10. С помощью пяти цифр 3, используя знаки действий и скобки, напишите число 39.

11. Продолжите ряд натуральных чисел: $n + 7$, $n + 9$, ...

12. Какое число натурального ряда предшествует числу $n + 4$?

13. Какое натуральное число следует за числом $n + 6$, но предшествует числу $n + 8$?

14. Где нужно поставить знаки «+» в записи 1 2 3 4 5 6 7, чтобы получить сумму, равную 100?

Тема 2 Тропинкой в страну «Арифметика»

Занятия 1—3. Как возникла арифметика? Происхождение арифметических действий. Из истории возникновения нуля. Почему на нуль делить нельзя? Интересные арифметические упражнения.

Катя Книжкина: «Сегодня мы отправляемся в страну «Арифметика», и я в различных занимательных книгах по математике нашла для вас много интересного материала об этой стране. Слово «арифметика» происходит от греческого *arithmos*, что означает «число». Арифметика — часть математики. Это наука о числах и действиях над ними, она изучает различные правила арифметических действий, учит решать задачи, сводящиеся к сложению, вычитанию, умножению и делению. С помощью натуральных чисел, которые изучаются в курсе арифметики, конструируются многие математические понятия. Арифметику считают очень полезной и удобной «азбукой счета». Производить арифметические действия быстро и безошибочно считалось большим искусством и являлось основной задачей арифметики.

Арифметика возникла в глубокой древности из практических потребностей счета предметов и простейших измерений земельных участков, ведения счета времени и других нужд. Арифметика постоянно развивалась в связи с хозяйственной деятельностью, различными денежными расчетами, решением задач, связанных с измерениями расстояний, времени, площадей, и благодаря требованиям, которые предъявляли к ней другие науки.

Предполагается, что арифметика возникла в странах Древнего Востока — Вавилоне, Китае, Индии и Египте. Источником первых достоверных сведений о состоянии арифметических знаний в эпоху древних цивилизаций являются письменные документы Древнего Египта (математические *папирусы*), написанные приблизительно за 2 тыс. лет до н. э. Это — сборники задач с указаниями их решений, правил действий над целыми числами и дробями со вспомогательными таблицами без каких бы то ни было пояснений теоретического характера.

В Древнем Вавилоне во III—II тыс. до н. э. также был довольно высокий уровень арифметической культуры, о чем позволяют судить клинописные математические тексты. Письменная нумерация в них представляет собой своеобразное соединение десятичной системы счисления с шестидесятеричной, с разрядными единицами 60, 60^2 и т. д. Техника выполнения арифметических действий у вавилонян осложнялась необходимостью прибегать к обширным таблицам умножения (для чисел от 1 до 59). В сохранившихся клинописных материалах, представлявших собой, по-видимому, учебные пособия, находятся некоторые таблицы, применявшиеся при делении и умножении.

Накопленные в странах Древнего Востока сокровища арифметических знаний продолжили свое развитие в Древней Греции. У древних греков практическая сторона арифметики не получила дальнейшего развития; применявшаяся ими система письменной нумерации с помощью букв алфавита была менее приспособлена для выполнения сложных вычислений, чем вавилонская. Древнегреческие математики положили начало теоретической разработке арифметики. До нашего времени до-шло много имен древнегреческих математиков. К ним относятся: Анаксагор, Фалес, Зенон, Евклид, Архимед, Эратосфен, Диофант, Аполлоний».

Петя Вопросов: «Катя, что ты знаешь о древнегреческих математиках? Расскажи ребятам о них подробнее».

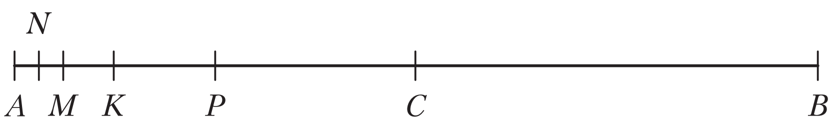
Катя Книжкина: «Мне удалось найти немногое. Сейчас я вас с этим познакомлю.

Анаксагор (500—428 гг. до н. э.) — известный древнегреческий математик. Он занимался математикой и астрономией, а также преподавал философию в Афинах.

Одним из вопросов, который вызывал много споров, был вопрос о делимости. Анаксагор утверждал, что среди малых величин нет самой маленькой. Уменьшение идет непрерывно, так как то, что существует, не может перестать существовать, следовательно, делить можно до бесконечности, при этом любая полученная часть будет больше нуля».

Петя Вопросов: «Можно ли это показать на примере?»

Катя Книжкина: «Сказанное можно показать на примере деления отрезка пополам. Делим отрезок AB, длина которого равна 80 см, пополам.



$AB = 80$ см, $AC = 40$ см, $AP = 20$ см, $AK = 10$ см, $AM = 5$ см, $AN = 2$ см 5 мм и т. д., причем какой бы маленький отрезок мы ни получали, всегда можно указать длину, в два раза меньшую, и т. д. И каждый из вновь полученных отрезков будет иметь длину, большую нуля».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, ты можешь рассказать что-нибудь о Фалесе и Пифагоре?»

К а т я К н и ж к и н а: «**Фалес** (624—547 гг. до н. э.) — древнегреческий купец, философ и математик. Древнегреческие купцы, приезжавшие в Египет, знакомились с математическими знаниями, которыми обладали жрецы, и впоследствии использовали их. Среди таких купцов был Фалес. Ему удалось просто решить задачу, которую не могли решить жрецы Египта. Это задача о высоте пирамиды. Им также было предсказано солнечное затмение (28 мая 585 г. до н. э.). В городе Милете Фалес создал философскую школу, которая сыграла большую роль в развитии математики. Принесенные из Египта сведения были в первое время достоянием только его школы. Считается, что основное определение арифметики — число есть совокупность единиц — принадлежит этой школе.

Пифагор (около 570 — около 500 гг. до н. э.) — родился на острове Самос. Его личность овеяна легендами. Он много путешествовал, около 22 лет пробыл в Египте, поэтому был хорошо знаком с развитием математики в этой стране. Пифагором была создана школа, в которой учеников учили правильно рассуждать. Ему приписывается высказывание: «Все есть число».

Пифагорейцы считали, что число — это основа бытия и причина стройности порядка, они верили, что в числовых закономерностях спрятана тайна мира. Вообще пифагорейцы достигли значительных успехов в теории чисел. Придавая им большое значение, они считали, что через них можно выразить все закономерности в мире.

Сами числа они наделяли различными свойствами, например 5 символизировало цвет, 6 — холод, 7 — разум, здоровье, 8 — любовь и т. д. Ими было положено начало «теории чисел». Они изучали свойства чисел, которые разбивались ими на классы (группы): четные, нечетные, простые, составные, совершенные, дружественные, треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д.

Особое значение пифагорейцы приписывали числам 7 и 36. Число 36, с одной стороны, — сумма кубов первых трех натуральных чисел ($1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$)*, а с другой — это сумма первых четырех четных и первых четырех нечетных чисел: ($2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7 = 36$).

К математическим наукам Пифагор и его ученики относили и музыку, установив, что высота звучания струны зависит от ее длины, т. е. числа. Именно они создали первую математическую теорию музыки.

Что касается теоремы Пифагора (одна из самых известных и используемых теорем, ее вы будете изучать на уроках геометрии), которую пифагорейцы приписывают своему учителю, то ею пользовались еще в Древнем Вавилоне до создания пифагорейской школы, но, возможно, первое ее доказательство действительно получено в этой школе.

В 332—331 гг. до н. э. на берегу Средиземного моря в дельте Нила в городе Александрия (столице государства Птолемеев) были созданы: библиотека на 700 тысяч свитков, музей, лаборатория, обсерватория, зоологический и ботанический сады и много других культурных учреждений. Александрия стала преемницей Афин и Древней Греции в дальнейшем развитии математических знаний.

---

* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, например $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

В это время в Александрии было много великих математиков. Возглавлять математическую школу Александрии был приглашен Евклид».

Вася Задачкин: «А о Евклиде и Архимеде я могу рассказать.

Евклид (III в. до н. э.) — древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Евклид свел в единое целое результаты многих греческих математиков. Его знаменитое произведение «Начала» состояло из 13 книг. В истории западного мира «Начала», после Библии, — наибольшее число раз изданная и более всего изучавшаяся книга. Свое сочинение Евклид начал с определений таких терминов, как «прямая», «угол» и «окружность», потом он сформулировал 10 самоочевидных истин (аксиом), таких, например, как «целое больше любой из частей». В «Началах» Евклида имеются утверждения о бесконечности числа простых чисел, основные утверждения о делимости, правила для нахождения общей меры двух отрезков и наибольшего общего делителя двух чисел (алгоритм Евклида, который в этом году мы будем рассматривать).

Архимед (287—212 гг. до н. э.) — крупный математик и механик. После обучения в Александрийской школе он вернулся в Сиракузы и был советником царя Гиерона. Им были созданы машины и приборы для обороны государства. Это были машины, которые бросали снаряды, метали стрелы, разбрасывали тяжести, «лапы», которые поднимали нос вражеских кораблей. Благодаря инженерному гению город долгое время оборонялся. Город Сиракузы пал только вследствие измены. Легенда повествует, что, когда враги ворвались в город, Архимед сидел в глубоком раздумье над чертежами и был заколот римскими солдатами. Тексты многих сочинений Архимеда сохранились до наших дней, а благодаря работе «Псаммит» («Исчисление песчинок») появилась возможность выражать большие числа.

Архимед построил систему счисления, которая ясно показала, что чисел бесконечно много, и позволила назвать каждое число, как бы велико оно ни было. Когда о каких-то предметах хотят сказать, что их так много, что и пересчитать нельзя, то часто говорят: «бесчисленны, как песок морской». Архимед показал, что можно указать числа, которые значительно больше числа песчинок на Земле, и если бы вся доступная нам Вселенная — до самых далеких звезд — была заполнена тончайшей пылью, то и для такого количества песчинок нашлось бы число и можно было бы назвать числа еще гораздо большие.

До Архимеда счет у греков проводился до 10 000 — мириада. Он принял мириаду за новую единицу и стал вести счет мириад. Мириада мириад давала единицу высшего разряда».

Катя Книжкина: «А мне хочется напомнить ребятам об Эратосфене.

Эратосфен (276—194 гг. до н. э.) — получил прекрасное образование в Афинах и был приглашен в Александрию заведовать библиотекой. Эратосфен в своих сочинениях указал способ выделения из натурального ряда простых чисел («решето Эратосфена», которое мы рассмотрим в теме 5), а о других древних математиках сами прочитайте в занимательной литературе».

Петя Вопросов: «А как развивалась арифметика на Руси?»

К а т я К н и ж к и н а: «Уровень математических знаний на Руси в XII в. был не ниже, чем в Западной Европе. Однако далее, вплоть до начала XVII в. (до реформ Петра Великого), пошло математическое отставание России по сравнению с Западной Европой. Это было связано с татаро-монгольским игом, отсутствием выходов к морю и причинами исторического порядка.

Перестройка государственной, общественной и культурной жизни России, начатая Петром I, требовала специалистов для создания новой регулярной армии, постройки торгового и военного флота, развития промышленности. Для подготовки таких кадров нужны были учебники. Автором учебника по математике был выдающийся педагог-математик Леонтий Филиппович Магницкий. Назывался учебник «Арифметика, сиречь наука числительная...» и был издан в количестве 2400 экземпляров. Магницкий создал книгу, которая на протяжении 50 лет была основным учебником по математике почти для всех учебных заведений России. Она сыграла большую роль в распространении математических знаний, в подготовке кадров для государственных учреждений страны.

«Арифметика» — одна из самых замечательных русских книг — была энциклопедией математических знаний того времени. В ней было много задач с остроумным содержанием, занятными формулировками, интересными способами решения. К некоторым задачам приводятся рисунки. Занимательным задачам посвящен целый раздел.

В учебниках того времени можно найти множество занимательных задач. Если в русской рукописной литературе XVII в. и в книгах начала и середины XVIII в. занимательные задачи были рассеяны среди учебных задач, то уже в конце XVIII в. этим задачам посвящаются отдельные издания [21, 33, 41].

Теперь я расскажу вам об *истории возникновения нуля и знаков арифметических действий*.

Первые математические знаки появились в древности у различных народов для обозначения чисел — это цифры. О них мы подробно говорили в теме 1.

Нуль — это целое число и в то же время — это одна из цифр в десятичной системе счисления. Название «нуль» происходит от латинского слова *nullus*, которое означает «никакой». В записи многозначного числа нуль используется для обозначения отсутствия единиц определенного разряда. Основное же свойство, характеризующее нуль как число, заключается в том, что любое число при сложении с нулем не меняется.

Нуль имеет долгую и интересную историю. Еще у вавилонян в V в. до н. э. был специальный знак ◄, который обозначал отсутствие разряда в записи числа, т. е. это далекий предок нуля. Греческие математики переняли у вавилонян способ записи чисел, но вместо клинописи они использовали буквы. Для обозначения пропущенного разряда они употребляли букву *о* — первую букву греческого слова «оуде́н», которое означало «ничто». В V—VI вв. индийцы стали использовать обозначение нуля, которым мы пользуемся и сейчас для записи чисел в десятичной системе».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, почему на нуль делить нельзя?»

К а т я К н и ж к и н а: «Мы знаем, что означает разделить одно число на другое. Например, $a : b$ — это значит найти такое число c, при умножении которого на b мы получим a. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то получим $c \cdot 0 = 0$, но $a \neq 0$. Следовательно, при делении на нуль мы не получаем результат, поэтому на нуль делить нельзя».

Петя Вопросов: «Катя, а почему нуль на нуль делить нельзя?»

Катя Книжкина: «Пусть при делении нуля на нуль получается некоторое число. Это может быть 0, 1, 5, 100 000 и т. д. И каждое из этих чисел при умножении на нуль даст нам нуль. Поэтому получается неоднозначность: любое число может быть результатом, а такого быть не должно. Следовательно, нуль на нуль делить нельзя».

Вася Задачкин: «Ребята, вам нужно запомнить:
$0 \cdot a = 0$, $0 : a = 0$, $a + 0 = a$,
$a - 0 = a$, $a - a = 0$».

Контрольные вопросы Пети Вопросова

1. Когда, считается, зародилась арифметика?
2. Что изучает арифметика?
3. Назовите известных древнегреческих ученых-математиков.
4. Кому приписывается высказывание: «Все есть число»?
5. Кто впервые показал, как выделить простые числа?
6. Кто написал первый русский учебник по математике и как он назывался?
7. Назовите основное свойство нуля, характеризующее его как число?
8. Кто впервые ввел обозначение нуля, которым мы пользуемся до сих пор?
9. Почему на нуль делить нельзя?

Упражнения Васи Задачкина

1. Какое целое число делится (без остатка) на любое целое число, отличное от 0?

2. Сколько имеется всего трехзначных чисел, в запись которых входит один раз цифра 5?

3. Сколько есть двузначных чисел, в записи каждого из которых встречается хотя бы раз цифра 7?

4. Сколько есть трехзначных чисел, в записи каждого из которых встречается хотя бы одна цифра 2?

5. Сколько имеется двузначных чисел, у которых: а) среди цифр есть хоть одна пятерка; б) цифра десятков меньше цифры единиц; в) цифра десятков больше цифры единиц?

6. Сколько четырехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, в которых цифры 2 и 4 не стоят рядом?

7. Сколько среди целых чисел от 10 до 1000 таких, что: а) в их записи встречаются ровно три одинаковые цифры; б) у которых каждая последующая цифра больше предыдущей; в) у которых сумма цифр равна 9?

8. Сколько среди целых чисел от 100 до 10 000 таких, в записи которых встречаются ровно 3 одинаковые цифры?

9. Сколько существует различных двузначных чисел, все цифры которых нечетные?

10. Какой цифрой оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 81?

11. Сколько нулей стоит в конце произведения всех чисел от 10 до 25?

12. Сколькими нулями заканчивается произведение от 1 до 100: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 100$?

13. В стозначном числе

$$12345678901234567890\ldots1234567890$$

вычеркнули все цифры на нечетных местах. В полученном пятидесятизначном числе снова вычеркнули все цифры на нечетных местах. Такое вычеркивание продолжалось до тех пор, пока не осталась одна цифра. Какова она?

14. В равенстве

$$\square\square\square+\square\square=\square\square\square$$

вместо квадратиков подберите цифры так, чтобы равенство выполнялось, даже если его перевернуть «вверх ногами».

Подсказка. Удобно использовать цифры 0, 1, 6, 8.

15. Сумма цифр двузначного числа — наибольшее из однозначных чисел, а число десятков на 2 меньше этой суммы. Какое это число?

16. Сумма двух чисел равна 51. Меньшее можно получить, зачеркнув в бóльшем одну цифру. Найдите эти числа.

17. Найдите два таких числа, что их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения.

18. Чтобы пронумеровать страницы некоторой книги, понадобилось 1164 цифры. Сколько в этой книге страниц?

19. В учебнике 296 страниц. Сколько цифр надо записать, чтобы их пронумеровать? Сколько раз будет использована каждая из цифр?

20. Выразите число 1000 восемью одинаковыми цифрами и знаками действий.

21. Выразите число 24: а) тремя восьмерками; б) тремя тройками; в) тремя двойками.

22. Выразите число 30: а) тремя пятерками; б) тремя шестерками; в) тремя тройками.

23. Запишите число 31, пользуясь знаками действий и:
1) пятью тройками;
2) шестью тройками;
3) пятью пятерками.

24. Запишите число 100, пользуясь знаками действий и:
1) пятью единицами;
2) пятью тройками;
3) пятью пятерками;
4) шестью одинаковыми цифрами;
5) девятью разными значащими цифрами.

25. Запишите число, являющееся суммой 13 тысяч, 12 сотен и 11 единиц.

Тема 3 Тропинкой в удивительный мир вычислений

Занятия 1—6. Интересные приемы устных и письменных вычислений. Особенности быстрого арифметического счета. Один из старинных способов вычисления на пальцах. Сложение нескольких последовательных чисел натурального ряда. Вычисления посредством таблиц. Вспомогательные средства вычислений. Простейшие электронные и счетные приборы, их историческое значение. Веселый счет.

В а с я З а д а ч к и н: «Сегодня мы с Катей и Петей будем рассматривать интересные вычислительные приемы и познакомим вас с ними».

П е т я В о п р о с о в: «Мне кажется, что в наш век широкого применения компьютеров, различных микрокалькуляторов и современных информационных технологий в этом нет необходимости».

Катя Книжкина: «Петя, ты не прав, во-первых, не всегда под рукой может быть компьютер или микрокалькулятор, а во-вторых, устные вычисления помогают развитию мышления и памяти».

Петя Вопросов: «Хорошо, я согласен, и даже слышал, что существуют старинные способы вычисления на пальцах. Давайте с них и начнем».

Катя Книжкина: «Считать люди научились давно, и у каждого народа была своя манера счета. Пальцевый счет был распространен практически у всех народов. Изучая историю возникновения счета, мы встречаем интересные приемы пальцевого счета. Его возникновение было вызвано необходимостью быстрого выполнения арифметических операций в практической деятельности людей, причем этому счету придавалась необходимая тогда наглядность. Таким образом, простые арифметические действия с помощью пальцев осуществлялись как бы на своего рода «счетной машине». И это были не только простые способы постепенного загибания пальцев, а оригинальные приемы.

У большинства людей правая рука более активная, поэтому счет обычно начинали с большого пальца или мизинца левой руки, дотрагиваясь правой рукой до пальцев левой руки, либо загибая пальцы левой руки, либо отгибая пальцы, ранее сжатые в кулак. Можно привести примеры и других способов счета. Например, жители островов Бенгальского залива начинали счет с мизинца, дотрагиваясь до своего носа очередным пальцем. А на острове между Австралией и Новой Гвинеей люди считали до пяти, постукивая пальцами левой руки. Затем они переходили не на правую руку, а на левое запястье, локоть, плечо, левую грудь и т. д. и продолжали счет, изменяя этот порядок на обратный, но уже с правой стороны тела. Математики заметили, что постукивание при счете применялось для обозначения порядковых чисел (первый, второй и т. д.), а когда пальцы поднимались сразу, то это обозначало количественные числа».

Вася Задачкин: «Я знаю, что римляне путем разгибания и загибания пальцев, а также путем вытягивания и складывания рук умели выражать числа от одного до миллиона. При этом три пальца левой руки, начиная с мизинца, служили у них в различных комбинациях для простых единиц, остальные пальцы левой руки — для десятков, большой и указательный пальцы правой руки — для сотен, а прочие — для тысяч. Чтобы выразить простую единицу, они загибали мизинец, чтобы выразить двойку — 4-й и 5-й пальцы. Число 90 обозначалось указательным пальцем, пригнутым к ладони. Для обозначения десятков тысяч они клали левую руку на грудь, бедро, для сотен тысяч пользовались таким же образом правой рукой. Складывание рук крест-накрест соответствовало миллиону. Римляне не только могли выражать на пальцах большие числа, но и умели производить при помощи пальцев некоторые действия. Пальцевый счет был распространен также в Греции и на Востоке, в средневековой Европе и в других странах. И сейчас еще некоторые народы быстро и искусно проделывают на пальцах умножение чисел первого десятка».

Вася Задачкин: «Рассмотрим некоторые примеры выполнения действий при помощи пальцев.

Умножение на 9.

Кладем перед собой ладони обеих рук. Для того чтобы получить результат умножения 9 на 6, загнем 6-й палец, считая слева, — это большой палец правой руки. Слева от загнутого пальца — 5 пальцев, справа — 4, получим 54. Умножим 9 на 3. Загибаем 3-й палец слева. Слева от него — 2 пальца и справа — 7, получим 27 и т. д.».

Петя Вопросов: «Приведу пример умножения с помощью рук чисел первого десятка, больших 5. Пусть надо умножить 7 на 9. Загибаем на одной руке столько пальцев, на сколько 7 больше 5, а на другой руке — на сколько 9 больше 5. Итак, на одной руке загнуты 2 пальца, не загнуты 3, на второй руке загнуты 4 пальца и не загнут 1 палец. Сложим числа загнутых пальцев ($2 + 4 = 6$), что даст число десятков, и перемножим числа незагнутых пальцев ($3 \cdot 1 = 3$), что даст число единиц. В результате получим 63».

Вася Задачкин: « Я покажу, как умножить 6 на 8.

На левой руке загибаем 1 палец, на правой — 3. Загнутые пальцы складываем ($3 + 1 = 4$), получаем десятки. Незагнутые пальцы перемножаем ($4 \cdot 2 = 8$), получаем единицы. Ответ: 48».

Катя Книжкина: «Рассмотрим теперь *приемы быстрого счета*. Я в интересных книгах по математике нашла много полезных приемов быстрого счета» [13, 31].

Петя Вопросов: «Лучше всего начать со сложения. Катя, объясни нам прием сложения столбцами».

Катя Книжкина: «Рассмотрим приемы сложения.

1. *Сложение столбцами.* В этом случае числа записываются в столбик, затем отдельно вычисляются суммы

цифр каждого разряда, и результаты записываются внизу в соответствующих разрядах. После этого складываются результаты выполненных промежуточных действий.

Пример.

$$\begin{array}{r} 3274 \\ 1256 \\ +\ 8392 \\ 4517 \\ \underline{7265} \\ 24 \\ 28 \\ 14 \\ 23 \\ \hline 24\,704 \end{array}$$

2. *Сложение прибавлением отдельных цифр*. При сложении этим способом к первому числу прибавляются сначала единицы второго числа, затем десятки и т. д. После нахождения суммы первых двух слагаемых к ней таким же образом прибавляется третье слагаемое и т. д.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 74 \\ 47 \\ 82 \\ 15 \end{array}$$

Последовательно получаем:

$32 \to 36 \to 106 \to 113 \to 153 \to 155 \to 235 \to 240 \to 250.$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} 347 \\ 512 \\ 468 \end{array}$$

Имеем: $347 \to 349 \to 359 \to 859 \to 867 \to 927 \to 1327.$

3. *Сложение с помощью округления слагаемых*. Этот способ удобен, когда слагаемые близки к «круглым» числам. В этом случае слагаемые сначала округляются, находится их сумма, затем находится сумма избытков, взятых со знаком «+», и недостатков, взятых со знаком «–». Наконец к сумме округленных чисел прибавляется сумма избытков и недостатков.

Пример.

603
795
412
292

1) Сумма округленных чисел: $600 + 800 + 400 + 300 = 2100$.

2) Сумма избытков и недостатков: $3 + 12 - 5 - 8 = 2$.

3) Итог: $2100 + 2 = 2102$».

В а с я З а д а ч к и н: «Рассмотрим интересный прием вычитания.

Вычитание при помощи дополнений. В этом случае уменьшаемое и вычитаемое увеличиваются (или уменьшаются) на одно и то же число, и уже над новыми числами производится вычитание».

П е т я В о п р о с о в: «Вася, приведи, пожалуйста, примеры».

В а с я З а д а ч к и н: «Вот примеры вычитания при помощи дополнений:

$55 - 36 = 59 - 40 = 19$;
$347 - 98 = 349 - 100 = 249$;
$542 - 23 = 539 - 20 = 519$».

К а т я К н и ж к и н а: «Давайте рассмотрим некоторые полезные приемы умножения.

1. *Умножение на 4 и на 8*. Чтобы число умножить на 4, можно его двукратно умножить на два. Умножение на 8 производится трехкратным умножением на 2».

Вася Задачкин: «Я сейчас покажу на примерах, как это умножается.

$57 \cdot 4 = 57 \cdot 2 \cdot 2 = 114 \cdot 2 = 228$;

$65 \cdot 8 = 65 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 130 \cdot 2 \cdot 2 = 260 \cdot 2 = 520$».

Катя Книжкина: «Рассмотрим далее.

2. *Умножение на 5, 15, 25*.

а) Чтобы умножить число на 5, достаточно его умножить на 10, а затем результат разделить на 2.

Например:

$248 \cdot 5 = 2480 : 2 = 1240$.

б) Если a — какое-либо число, то

$$a \cdot 15 = a \cdot (10 + 5) = a \cdot 10 + a \cdot 5.$$

Отсюда видно, что для умножения числа на 15 достаточно это число умножить на 10 и к полученному результату прибавить его половину.

Например:

$943 \cdot 15 = 9430 + 4715 = 14\,145$.

в) Чтобы число умножить на 25, достаточно его умножить на 100 и результат разделить на 4.

Например:

$317 \cdot 25 = 31\,700 : 4 = 7925$».

Петя Вопросов: «Существуют ли простые приемы умножения на 9 и на 11?»

Катя Книжкина: «Давайте рассмотрим *умножение на 9, на 11* и еще некоторые интересные и простые приемы.

а) *Умножение на 9.* Так как $9 = 10 - 1$, то $a \cdot 9 = a \times \times (10 - 1) = 10a - a$. Таким образом, чтобы число умножить на 9, его сначала надо умножить на 10 и от результата отнять само это число».

Вася Задачкин: «Я подобрал пример на умножение этим методом:

$4924 \cdot 9 = 49\,240 - 4924 = 44\,316$».

Катя Книжкина: «*Умножение на 11.* Очевидно, в этом случае к результату умножения на 10 нужно прибавить само это число.

Например:

$3816 \cdot 11 = 38\,160 + 3816 = 41\,976$».

Вася Задачкин: «Впрочем, можно указать и более простой способ. Если умножить 11 на 3816 столбиком, то получим:

$$\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 11 \\ 3816 \end{array} \\
\hline
66 \\
11 \\
88 \\
33 \\
\hline
41\,976
\end{array}$$

Мы видим, что последней цифрой результата является последняя цифра второго сомножителя, а каждая последующая равна сумме соседних цифр числа (если сумма больше 9, то единица переносится в следующий разряд), т. е. последовательно получаем 6; $6 + 1 = 7$; $1 + 8 = 9$; $8 + 3 = 11$ (1 записывается и 1 переносится в следующий разряд); $3 + 1 = 4$».

Катя Книжкина: «*Умножение на число, оканчивающееся цифрой 5*.

В этом случае сомножитель, оканчивающийся цифрой 5, умножаем на 2, а второй сомножитель делим на 2, затем перемножаем полученные числа.

Например:

$428 \cdot 35 = 214 \cdot 70 = 14\,980$.

Использование округления сомножителей при умножении.

Например:

$24 \cdot 52 = 24 \cdot (50 + 2) = 1200 + 48 = 1248$».

Вася Задачкин: «Рассмотрим возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

Пусть число имеет вид $\overline{a5}$, тогда его можно представить в виде $10 \cdot a + 5$. Возведем это число в квадрат:

$$(10a+5)^2 = (10a+5) \cdot (10a+5) =$$
$$= (10a+5) \cdot 10a + (10a+5) \cdot 5 = 100a^2 + 50a + 50a + 25 =$$
$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100a \cdot (a+1) + 25.$$

Таким образом, число сотен равно $a \cdot (a + 1)$; для получения квадрата к нему нужно дописать 25».

Петя Вопросов: «Вася, у меня уже есть соответствующие примеры:

$$65^2 = 100 \cdot 6 \cdot 7 + 25 = 4225;$$
$$35^2 = 1225;$$
$$115^2 = 13\,225».$$

Катя Книжкина: «В конце нашего знакомства с интересными приемами устных и письменных вычислений я познакомлю вас с *возведением в квадрат произвольных двузначных чисел*.

Пусть двузначное число имеет вид $\overline{ab}$, т. е. оно равно $10a + b$. Тогда $(10a + b)^2 = (10a + b) \cdot (10a + b) = (10a + b) \times$ $\times\, 10a + (10a + b) \cdot b = 100a^2 + 10ab + 10ab + b^2 = 100a^2 +$ $+\, 20ab + b^2$. Это означает, что число единиц равно b^2, число десятков равно $2ab$, число сотен равно a^2.

Пример 1.

Вычислим 31^2.

Число единиц: $1^2 = 1$.

Число десятков: $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

Число сотен: $3^2 = 9$.

Результат: 961.

Пример 2.

Вычислим 68^2.

Число единиц: $8^2 = 64$ (4 записываем, 6 запоминаем).

Число десятков: $2 \cdot 6 \cdot 8 + 6 = 102$ (2 записываем, 10 запоминаем).

Число сотен: $6^2 + 10 = 46$.

Результат: 4624».

Вася Задачкин: «Катя, расскажи, пожалуйста, о простейших электронных и счетных приборах и об их историческом значении».

Катя Книжкина: «По этим вопросам существует очень много различной литературы и я предлагаю тебе и ребятам подготовить интересные сообщения, побывав в библиотеке».

Контрольные вопросы Пети Вопросова

1. Как выполняется сложение чисел столбцами?

2. Как выполняется сложение чисел прибавлением отдельных цифр?

3. Как выполнить сложение, используя округление слагаемых?

4. Приведите пример вычитания при помощи дополнений.

5. Как найти разность с помощью последовательного вычитания разрядов?

6. Как устно число умножить на 8?

7. Как число умножить на 5, на 25?

8. Как можно число умножить на 9, на 11?

9. Умножьте столбиком 111 на какое-нибудь пятизначное число и на основании этого примера сформулируйте правило умножения числа на 111.

10. Как умножить число на другое число, оканчивающееся цифрой 5?

11. Какой закон умножения используется при умножении чисел методом округления?

12. Как возвести в квадрат двузначное число, оканчивающееся цифрой 5?

13. Как устно возвести в квадрат двузначное число?

Упражнения Васи Задачкина

Используя эти задания, можно организовать соревнования «Веселый счет».

1. Используя способ сложения столбцами, выполните сложение чисел:

а) 4512	б) 4913	в) 54 327
3894	814	2819
4314	3257	4586
1238	6328	75 012
9842	2745	39 407

г) 3448	д) 5189	е) 32 048
32	4567	51 423
609	563	83 540
8572	7054	4518
4561	8634	89 745

2. Используя способ сложения столбцами, найдите сумму. Вместо символа «*» подберите такую цифру, чтобы сумма делилась на 10:

45 987
32 56*
25 613
76 514
57 832

3. Выполните сложение прибавлением отдельных цифр:

а) 56	б) 312	в) 3274
12	245	1353
47	164	2406
62	243	
81	432	

4. Выполните сложение прибавлением отдельных цифр; вместо символа «*» подберите такую цифру, чтобы сумма делилась на 9:

502
314
463
217
*43

5. Выполните сложение, используя округление слагаемых:

а)	б)	в)
53	363	308
39	213	412
82	427	488
91	264	509
58	558	605

г)	д)	е)
632	562	407
344	248	511
718	623	208
839	262	514
423	448	694

6. Выполните вычитание, используя дополнения:

а) $48 - 29$;
б) $254 - 37$;
в) $345 - 119$;
г) $272 - 168$;
д) $843 - 266$;
е) $1024 - 598$.

7. Выполните умножение:

а)	б)
$24 \cdot 4$;	$68 \cdot 15$;
$23 \cdot 8$;	$54 \cdot 15$;
$43 \cdot 4$;	$16 \cdot 25$;
$67 \cdot 4$;	$48 \cdot 25$;
$217 \cdot 8$;	$80 \cdot 15$;
$332 \cdot 8$.	$60 \cdot 25$.

8. Выполните умножение:

$45 \cdot 5$;	$28 \cdot 5$;	$360 \cdot 5$;
$48 \cdot 15$;	$46 \cdot 15$;	$35 \cdot 15$;
$32 \cdot 25$;	$68 \cdot 25$;	$224 \cdot 25$;
$52 \cdot 15$;	$72 \cdot 15$;	$44 \cdot 25$.

9. Выполните умножение:

$42 \cdot 9$; $85 \cdot 9$; $47 \cdot 9$;
$35 \cdot 11$; $39 \cdot 11$; $78 \cdot 11$;
$345 \cdot 11$; $4279 \cdot 11$; $9999 \cdot 11$.

10. Выполните умножение:

$48 \cdot 15$; $34 \cdot 45$; $210 \cdot 35$;
$122 \cdot 55$; $240 \cdot 35$; $22 \cdot 85$.

11. Выполните умножение, используя округление сомножителей:

$42 \cdot 12$; $93 \cdot 31$; $45 \cdot 32$;
$31 \cdot 43$; $47 \cdot 102$; $23 \cdot 204$.

12. Выполните возведение в квадрат:

35^2; 65^2; 55^2;
85^2; 75^2; 115^2.

13. Выполните возведение в квадрат:

41^2; 23^2; 34^2;
62^2; 38^2; 82^2.

Тема 4 Тропинкой в удивительный мир арифметических и геометрических игр, головоломок и фокусов

Занятия 1—6. Арифметические закономерности. Задания на восстановление чисел и цифр в арифметических записях. Нахождение арифметических действий в зашифрованных действиях. Волшебные квадраты. Арифметические фокусы. Арифметические игры и головоломки.

Вася Задачкин: «Ребята, нас ждет удивительный мир арифметических и геометрических игр, головоломок и фокусов.

Арифметические закономерности

1. Установите закономерность в расположении чисел каждого ряда и допишите еще два числа в соответствии с этой закономерностью:

а) 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...;
б) 10; 9; 8; 7; 6; 5; ...;
в) 5; 10; 15; 20; 25; 30; ...;
г) 6; 9; 12; 15; 18; 21; ...;
д) 3; 7; 11; 15; 19; 23; ...;
е) 24; 21; 18; 15; 12; 9; ...;
ж) 1; 2; 4; 8; 16; 32; ...;
з) 9; 1; 7; 1; 5; 1; ...;
и) 25; 24; 22; 21; 19; 18; ...;
к) 12; 14; 13; 15; 14; 16; ...;
л) 16; 12; 15; 11; 14; 10; ...;
м) 4; 5; 8; 9; 12; 13; ...;
н) 1; 4; 9; 16; 25; 36; ...;
о) 15; 16; 14; 17; 13; 18; ... .

Если успеете дописать все числа за 10 минут, то вы достаточно сообразительны.

2. Установите закономерность в расположении чисел каждого ряда и допишите вместо знака «*» еще одно число в соответствии с этой закономерностью:

а) 3; 5; 9; 17; *;
б) 1; 1; 2; 3; 5; 8; *;
в) 0; 3; 8; 15; 24; 35; *;
г) 1; 8; 27; 64; 125; *.

3. Найдите закономерность и вставьте пропущенное число (числа):

а) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 21, 34;
б) 7, 17, 37, 77, ..., 317».

Катя Книжкина: «Я предлагаю *задания на восстановление чисел и цифр в арифметических записях.*

Математическими ребусами называют задания на восстановление записей вычислений. Условие математического ребуса содержит либо полностью зашифрованную запись, где цифры заменены буквами, звездочками или фигурами, либо в условии заменена только часть цифр. Если символы или буквы в задании различные, то они обозначают различные цифры, если одинаковые, то нужно помнить, что одинаковые цифры обозначаются одной и той же буквой или символом.

Восстановление записей выполняется на основании логических рассуждений. При этом нельзя ограничиваться отысканием одного решения. Для решения удобно переписать пример, заменяя все буквы точками. Постепенно вместо точек будем писать найденные цифры, пока не восстановится вся запись примера.

Рассмотрим числовые ребусы двух видов:

1) Числовые ребусы, использующие операции сложения и вычитания.

2) Числовые ребусы, использующие операции умножения и деления.

Для решения числовых ребусов в примерах на умножение полезны следующие рекомендации.

Если в результате умножения некоторого числа на однозначное число получено исходное число, то, очевидно, множитель равен единице. Нуль не может быть крайней левой цифрой в числе, а результат умножения на нуль состоит из одних нулей. Если в результате умножения некоторого числа, не оканчивающегося нулем, на некоторое однозначное число в числе единиц получен нуль, то число единиц множимого и множителя есть пара чисел, одно из которых равно пяти, а второе — четное.

Я покажу на простом примере, как можно рассуждать в данном случае.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 8* \\ ** \end{array} \\ \hline *8 \\ + \begin{array}{r} ** \\ \end{array} \\ \hline *** \end{array}$$

В этом примере 8 — число десятков множимого. Если только эти 8 десятков умножим хотя бы на 2, то в первом неполном произведении получим трехзначное число. А в данном примере видно, что здесь число двузначное. Следовательно, во множителе на месте единиц должна стоять цифра 1. Только от умножения 8 на 1 в первом неполном произведении на месте единиц получим цифру 8. Значит, множитель 88. Ответ: $88 \cdot 11 = 964$.

Рассмотрим еще один пример.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} **\\ 8*\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} ***\\ **\end{array} \\ \hline **** \end{array}$$

Чтобы при умножении двузначного числа на 8 получить двузначное число, необходимо, чтобы число десятков множимого было равно 1.

Так как произведение двузначного числа с числом десятков, равным 1, на 8 дает двузначное число, то число единиц множимого не более 2, т. е. 0, 1 или 2.

Но произведение этого двузначного числа на число единиц множителя дает трехзначное число. Значит, единиц множителя больше 8, т. е. 9, а числом единиц множимого может быть только число 2.

Следовательно, пример расшифровывается так:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 12\\ 89\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 108\\ 96\end{array} \\ \hline 1068 \end{array}$$

Рассмотрим более сложный пример, в котором необходимо восстановить цифры, обозначенные звездочками. Для удобства нужно пронумеровать строчки. Если посмотреть на последнюю строчку, то легко можно увидеть, что в третьей строчке последняя цифра 0. Теперь можно найти последнюю цифру в первой строчке. Это цифра 5. При умножении на 2 последней цифры первой строчки возможны два варианта: либо это цифра 0, либо 5 ($0 \cdot 2 = 0$ и $5 \cdot 2 = 10$), но в пятой строчке последняя цифра 5, а она получена при умножении 3 (первая цифра второй строчки) на последнюю цифру первой строчки. Таким образом, последняя цифра первой строчки — 5. Теперь посмотрим на четвертую строчку. В конце нее стоит 0, потому что сумма цифр, стоящих во втором с конца столбике, равна 3. Посмотрим на вторую строчку. Вместо знака «*» в ней стоит цифра 8, потому что при умножении 15 (конец первой строчки) на 8 получается число, последние цифры в записи которого 2 и 0. Теперь можно определить первую цифру первой строчки. Только при умножении 8 на 4 получаем двузначное число, в котором первая цифра 3. В итоге получили $415 \cdot 382$, и определить все оставшиеся цифры не составляет труда, нужно просто перемножить числа.

$$\begin{array}{rr}
{*}1{*} & 1\\
\times\ 3{*}2 & 2\\
\hline
{*}3{*} & 3\\
+\ 3{*}2{*} & 4\\
{*}2{*}5 & 5\\
\hline
1{*}8{*}30 & 6
\end{array}$$

Ответ: $415 \cdot 382$».

Упражнения Васи Задачкина

«Ребята, теперь, после объяснения Кати, попробуйте сами восстановить примеры»:

а) $$\begin{array}{r} 2*7 \\ -\ *6* \\ \hline 128 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} **** \\ -\ *** \\ \hline 1 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} *2* \\ +\ 2*2 \\ \hline *000 \end{array}$$

г) $$\begin{array}{r} 8* \\ \times\ *** \\ \hline ** \\ +\ ** \\ ** \\ \hline ***8 \end{array}$$

д) $$\begin{array}{r} **5 \\ \times\ 1** \\ \hline 2**5 \\ +\ 13*0 \\ *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r} *2* \\ \times\ *7 \\ \hline 22*8 \\ +\ *6*0 \\ \hline **46* \end{array}$$

Катя Книжкина: «Некоторые числовые ребусы, в силу своей конструкции, позволяют применять особые приемы, которые приводят к оригинальному и короткому решению.

Рассмотрим два класса таких задач. К первому классу отнесем ребусы, в которых слова состоят из одних и тех же наборов букв, но взятых в различных комбинациях. Это дает возможность оперировать каждым набором как единым числом. Например:

$$\begin{array}{r} \text{МОДА} \\ +\ \text{МОДА} \\ \hline \text{КАМОД} \end{array}$$

Отметим, во-первых, что К = 1, так как при сложении двух четырехзначных чисел получаем пятизначное число. Далее выделим два набора: «А» и «МОД». Обозначим МОД = Р. Тогда задача может быть записана так:

$$2 \cdot 10 \cdot Р + 2 \cdot А = 10\,000 + 1000 \cdot А + Р$$
$$19 \cdot Р = 10\,000 + 998 \cdot А.$$

Это уравнение имеет единственное решение: А = 7; Р = 894, которое может быть найдено путем перебора значений А. Действительно, так как А — однозначное число, то найдем и 10 вариантных значений А. Из них целое и, очевидно, трехзначное число будет удовлетворять уравнению. Получим:

$$\begin{array}{r} 8947 \\ +\ \ 8947 \\ \hline 17\,894 \end{array}$$».

Вася Задачкин: «Расшифруйте пример:

1) Д – В – А = Д : В : А = 2 (разным буквам соответствуют разные цифры).

Расшифруйте запись умножения:

2) КМ · НО = МММ.

3) $\begin{array}{r} ТРИ \\ +\ ДВА \\ \hline ПЯТЬ \end{array}$.

Я предлагаю вам интересные *задания на нахождение арифметических действий в зашифрованных действиях*.

1. При переписывании примера ученик забыл поставить скобки, выполненная им запись оказалась такой: $20 : 5 \cdot 2 + 6^2$.

Восстановите скобки, если ответом примера должно быть число:

а) 38; б) 196; в) 152.

2. Расставьте в записи 7 9 + 1 2 : 3 – 2 скобки так, чтобы значение этого выражения было равно:

а) 23; б) 75.

3. Между некоторыми из цифр 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанных в указанном порядке, поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число 100.

4. Расставьте в записи 4 1 2 + 18 : 6 + 3 скобки так, чтобы получилось: а) число 50; б) наибольшее возможное число.

5. В записи 1 * 2 * 3 * 4 * 5 замените звездочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.

6. В записи 8 8 8 8 8 8 8 8 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

7. В записи 7 7 7 7 7 7 поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий и скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.

8. В записи 9 8 7 6 5 4 3 2 1 поставьте между некоторыми цифрами знаки «+» или «–» так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

9. Записаны подряд двадцать пятерок 555...55. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы сумма равнялась 1000.

10. В записи 9 9 9 9 9 9 9 поставьте между некоторыми девятками знаки «+» или «–» так, чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

11. Какое число в 7 раз больше своей последней цифры?

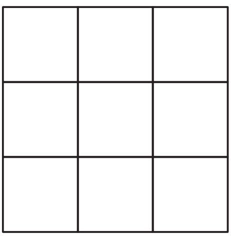
12. Шестизначное число начинается цифрой 5. Если переставить эту цифру на последнее место шестизначного числа, то получится число, в 4 раза меньшее первоначального. Найдите это число.

13. Трехзначное число 87* делится на 5, а также на 3. Какова последняя цифра?

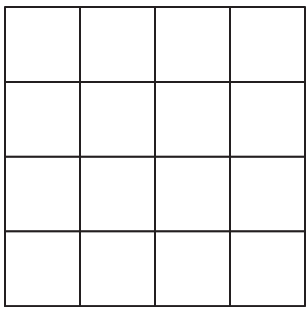
14. К числу 37 припишите справа и слева одну и ту же цифру, такую, чтобы полученное четырехзначное число разделилось на 6».

Петя Вопросов: «Давайте познакомим ребят с *волшебными или магическими квадратами*».

Катя Книжкина: «Магический квадрат — это квадрат, у которого суммы чисел в клетках на каждой горизонтали (строке), вертикали (столбце) и на диагоналях (с угла в угол) одинаковы. В некоторых заданиях указывается, какая сумма должна получиться, в других — она не указывается, и нужно самим ее определить. На рисунке показаны квадраты 3×3 и 4×4. Аналогично рисуются квадраты 5×5 и т. д.



квадрат 3×3



квадрат 4×4

Магические квадраты заинтересовали мыслителей достаточно давно. Первое упоминание о них встречается в древних рукописях Китая, относящихся к V—IV тыс. до н. э. С ними были знакомы математики Древней Индии. Из Индии увлечение магическими квадратами перешло к арабам, которые приписывали этим числовым сочетаниям таинственные свойства. В Западной Европе в средние века магические квадраты были достоянием тех людей, которые занимались алхимией и астрологией. Они верили, что дощечка с изображением на ней магического квадрата способна отвратить беду от человека, который носит на себе такой талисман.

Следует отметить, что составление магических квадратов является не только игрой. Их теорию разрабатывали многие выдающиеся математики. Она находит применение в решении важных проблем математики» [19, 20].

Вася Задачкин: «Рассмотрим сначала простые задания.

1. Даны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Числа 1, 4, 5 уже расположены в клетках квадрата. Расставьте остальные числа так, чтобы получился магический квадрат.

4		
	5	
	1	

2. Даны числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Числа 5, 6, 9 уже вписаны, а остальные нужно вписать, чтобы сумма в любом направлении была одинаковой. Какое число будет такой суммой?

		9
	6	
		5

3. Даны числа: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Числа 8 и 9 уже вписаны, а остальные нужно вписать, чтобы сумма в любом направлении была одинаковой. Какое число будет такой суммой?

	9	
8		

Обратите внимание на то, что во всех трех заданиях в центре квадрата записано среднее число, т. е. пятое от начала и пятое с конца.

4. Разместите в свободные клетки числа 23, 41, 47, 65, 71 так, чтобы сумма в любом направлении была одинаковой. Какое число будет такой суммой?

35		17
		59
	11	

5. Перед вами три квадрата, в которых уже расставлены некоторые числа от 1 до 16. Посмотрите, можете ли вы указать для каждого из квадратов то число, которое является суммой чисел, стоящих по вертикалям, горизонталям и диагоналям?

Расставьте в каждом из квадратов остальные числа.

а)

1	14		
		6	9
	11		
	2	3	16

б)

15	10		
	6	16	
14	11		
		13	12

в)

	3		
9		5	4
	2		
			1

6. Впишите в пустые клетки недостающие числа от 1 до 16, чтобы в сумме по всем столбцам, строкам и обеим диагоналям получилось число 34.

			5
	13	11	
		6	9
	1		

7. Вставьте числа 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8 в клетки квадрата так, чтобы сумма чисел в каждом горизонтальном, вертикальном и диагональном рядах равнялась 18».

К а т я К н и ж к и н а: «Посмотрите, как я решила задачу 7».

Условие:

7			1
6			4

Решение:

7	8	2	1
1	2	8	7
4	3	5	6
6	5	3	4

В а с я З а д а ч к и н: «Теперь рассмотрим задания, в которых все числа нужно расставлять самостоятельно. Эти задания сложнее, потому что для их решения необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Чему должна равняться сумма чисел, например, в какой-либо строке?

2. Какое число должно стоять в центре квадрата?

3. Любые ли числа могут находиться в угловых клетках квадрата?

Эти вопросы — главные при заполнении квадратов. Ответы на них являются основой решения задач этого типа. Покажем, как нужно рассуждать при заполнении квадрата.

Расположите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в виде квадрата 3×3 так, чтобы их сумма в каждом горизонтальном, вертикальном и диагональном рядах была одинаковой.

Сумма чисел в каждой строке должна быть равна 15, так как

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

а всего три строки. Необходимый перебор трех слагаемых, сумма которых равнялась бы 15, можно осуществить восемью способами (9; 5; 1), (9; 4; 2), (8; 6; 1), (8; 5; 2), (8; 4; 3), (7; 6; 2), (7; 5; 3), (6; 5; 4). Число строк, столбцов и диагоналей в квадрате тоже равно 8. Значит, каждая из комбинаций должна ровно один раз войти в искомый квадрат. Далее замечаем, что только число 5 входит в тройки четыре раза, поэтому его помещаем в центр. Числа, стоящие в тройках по три раза: 8, 2, 6, 4, должны стоять в углах. После этого легко размещаются еще четыре числа.

8. Расставьте в каждой из девяти клеток квадрата 3×3 числа 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36 так, чтобы произведение чисел в каждом горизонтальном, вертикальном и диагональном рядах равнялось 216.

9. Впишите в клетки квадрата 4×4 числа от 1 до 16, каждое ровно один раз, так, чтобы получился магический квадрат.

10. Впишите в клетки квадрата 5×5 числа от 1 до 25, каждое ровно один раз, так, чтобы получился магический квадрат».

Петя Вопросов: «А я люблю решать судоку. Это квадраты, составленные из 9 квадратиков 3×3. Решать судоку полезно и интересно. Заполнять клеточки очень просто. Нужно в каждом квадрате 3×3 расставить числа от 1 до 9 так, чтобы: 1) в любой строке и в любом столбце квадрата 9×9 не было одинаковых цифр; 2) в любом квадратике 3×3 не было одинаковых цифр.

В качестве примера я покажу уже заполненный квадрат. На рисунке данные в квадрате числа выделены жирным шрифтом, а остальные — светлым.

3	**9**	**1**	**6**	2	8	**7**	5	**4**
6	**4**	8	**5**	9	7	**2**	3	**1**
2	**5**	7	**3**	**1**	**4**	**6**	8	**9**
4	7	5	**9**	**8**	6	**1**	**2**	**3**
8	**3**	**9**	2	7	1	**5**	**4**	6
1	**6**	**2**	4	**5**	**3**	8	9	7
7	1	**3**	**8**	**4**	**2**	9	**6**	5
5	8	**6**	**7**	3	**9**	4	**1**	2
9	2	**4**	1	6	**5**	**3**	7	**8**

А теперь попробуйте сами заполнить квадраты судоку.

		2			3	7	4	5
3		4	7	8	2			
7	1	6			4	2		3
6	4	8	2	1			3	
	2		9	3	6		7	
	7			5	8	1	6	2
2		1	3			8	9	4
			6	2	1	3		7
5	3	7	8			6		

8			4	9	7	3		
4	6					2	7	8
1	7	3		2	6	9		
5	9	2		4	1			
7	3		6	8	2		4	9
			5	3		7	2	1
		8	2	5		6	9	7
2	4	7					3	5
		6	1	7	3			2

	4			5		7	8	2
8	9	1	4	2		6		
	5	7	8	6		4		
4	1		9		8			5
5	7		2		6		4	1
3			5		4		7	8
		5		4	2	8	9	
		6		8	1	5	3	4
7	8	4		9			2	

Арифметические фокусы. Арифметические игры и головоломки

Катя Книжкина: «Ребята, я подобрала для вас интересные игры. Давайте поиграем.

1. Игра с выкладыванием домино на прямоугольную доску

Оборудование: прямоугольная доска, кости домино.

Правила игры: участники по очереди кладут кости домино на прямоугольную доску, располагая их произвольно, костей должно быть достаточно для накрывания всей поверхности доски. Выигрывает тот, кому удается положить последнюю кость домино.

2. Игра с выкладыванием монет по кругу

Оборудование: монеты (плоские круглые фишки).

Правила игры: на столе из монет выкладывается окружность так, чтобы они соприкасались. Участники делают ходы по очереди, за один ход можно взять одну или две монеты, которые лежат рядом. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету.

3. Игра «Ним»

Оборудование: игровое поле (любая ровная поверхность), фишки одного цвета (камешки или монеты).

Правила игры: фишки раскладываются на игровом поле (наиболее известный вариант с 12 фишками, которые раскладывают в три ряда: 3, 4, 5 фишек), игроки по очереди берут по одной или несколько фишек из любого ряда, выигрывает тот, кто возьмет последнюю фишку. Можно играть наоборот, считая того, кто взял последнюю фишку, проигравшим.

4. Игра «Так-тикль»

Игра распространена среди школьников стран Европы и придумана совсем недавно.

Оборудование: игровое поле 4×4 (16 клеток) (поле 1 в приложении), 4 шашки черного цвета и 4 — белого.

Правила игры: каждый из играющих расставляет свои шашки по обеим сторонам поля через одну с шашками противника; за один ход шашку можно передвигать на одну свободную клетку вверх или вниз, вправо или влево, но не по диагонали; шашки противника с поля не снимаются. Задача заключается в том, чтобы расположить три шашки своего цвета в один ряд по вертикали, горизонтали или диагонали.

5. Игра «Мельница»

Эта игра была известна еще в Древней Греции и в Риме, но и сейчас она имеет довольно широкое распространение. Название «мельница» объясняется тем, что каждые три шашки, выставленные в один ряд, направленный в центр игрового поля, образуют как бы крыло ветряной мельницы.

Оборудование: игровое поле (поле 2 в приложении), 9 белых и 9 черных шашек.

Правила игры: в начале игры оба играющих по очереди выставляют свои 9 шашек на любые кружки игрового поля, стараясь поставить 3 шашки в один ряд в любом направлении. Задача играющего — расположить свои шашки так, чтобы партнер не мог замкнуть ряд. Когда 18 шашек будут выставлены на поле, игроки делают по очереди ходы, передвигаясь на один свободный кружок по черным линиям (штриховым или сплошным). Играющие стараются построить 3 свои шашки в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Если игроку удается построить ряд из трех шашек, он получает право снять шашку противника. Разрешается «перепрыгивать» через одну шашку (свою или противника), если за ней есть свободный кружок. Тот игрок, у которого в процессе игры останутся только 2 шашки, считается побежденным».

Катя Книжкина: «Эти фокусы вы можете показать своим родителям и друзьям. Разобраться в них и научиться их выполнять несложно. Потренируйтесь предварительно и удивляйте.

Фокус «Феноменальная память»

Для проведения этого фокуса необходимо заготовить много карточек, на каждой из которых поставить ее номер (двузначное число) и записать семизначное число по особому алгоритму. «Фокусник» раздает карточки участникам и объявляет, что он запомнил числа, записанные на каждой карточке. Любой участник называет номер карточки, а фокусник, немного подумав, говорит, какое на этой карточке записано число. Разгадка данного фокуса проста: чтобы назвать число, «фокусник» проделывает следующие действия: прибавляет к номеру карточки число 5, переворачивает цифры полученного двузначного числа, затем каждая следующая цифра находится сложением двух последних, если получается двузначное число, то берется цифра единиц. Например: номер карточки — 46. Прибавим 5, получим 51, переставим цифры, получим 15, сложим цифры, следующая — 6, затем 5 + 6 = 11, т. е. возьмем 1, потом 6 + 1 = 7, дальше цифры 8, 5. Число на карточке: 1 561 785.

Фокус «Угадать задуманное число»

«Фокусник» предлагает кому-нибудь из учащихся написать на листе бумаги любое трехзначное число. Далее приписать к нему это же число еще раз. Получится шестизначное число. Передать лист соседу, пусть он разделит это число на 7. Передать лист дальше, пусть следующий ученик разделит полученное число на 11. Снова передать результат дальше, следующий ученик пусть разделит полученное число на 13. Затем передать лист «фокуснику». Он может назвать задуманное число».

Петя Вопросов: «Ребята, может, вы догадались, как «фокусник» отгадывает задуманное число?»

Предсказание задуманного натурального числа

Катя Книжкина: «Задачи на угадывание или предсказание задуманного натурального числа, в сущности, сводятся не к отгадке, а к решению некоторой задачи. Вы предлагаете кому-либо задумать число, и это число у него не спрашиваете. Затем вы предлагаете задумавшему произвести над задуманным им числом разные с виду произвольные действия и сказать вам, что в результате получилось. В конечном итоге вы получаете конец нити, по которой разматываете весь клубок и добираетесь до начала.

Рассмотрим самые простые задания.

1) Я задумала число, прибавила к нему 1, сумму умножила на 2, полученное произведение разделила на 3, из результата вычла 4, получила 6. Какое число я задумала?

Решение. Рассуждаем в обратном порядке: 6 + 4 = 10; 10 : 3 = 30;

30 : 2 = 15; 15 – 1 = 14. Ответ: 14.

$(x + 1) \cdot 2 : 3 - 4 = 6$.

2) Задумайте какое-либо число. Прибавьте к этому числу 2, полученную сумму умножьте на 4, из последнего произведения вычтите 8.

$(x + 2)4 - 8 = x : 4$.

Чтобы отгадать число, которое задумали, надо полученное число разделить на 4.

3) Задумайте число, прибавьте к нему 6, из суммы вычтите 2, затем еще вычтите задуманное число, к результату прибавьте 1. Получится 5.

Объяснение:

$x + 6 - 2 - x + 1 = 5$.

Как видим, секрет отгадывания заключается в том, что задуманное число вычитается, а вычисления производятся над остальными числами, а именно: $6 - 2 + 1 = 5$».

Петя Вопросов: «Очень интересный арифметический фокус связан со свойствами числа 1001. Задумайте какое-нибудь трехзначное число. Допишите к этому числу справа такое же число. Например, если вы задумали число 328, то получится 328 328. А теперь разделите задуманное число на 7. Разделили? У каждого из вас деление выполняется нацело. А теперь результат разделите на 11. У вас опять деление выполнится нацело. Теперь я предлагаю разделить полученный результат на 13. Если вы все действия выполняли без ошибок, то у вас получится задуманное число. Можете ли вы объяснить этот фокус, в чем его секрет?»

Вася Задачкин: «Я хочу предложить ребятам *задания на угадывание числа и месяца рождения.*

Вспомните число, когда вы родились. Умножьте это число на 2, полученное произведение умножьте еще на 5, к новому произведению прибавьте 20, сумму умножьте на 10, к полученному произведению прибавьте порядковый номер месяца рождения, назовите число, которое у вас получилось, а я отгадаю, какого числа и в каком месяце вы родились.

Из полученных чисел надо вычесть 200. Получим трехзначные или четырехзначные числа. Первые одна или две цифры, считая справа налево, обозначают порядковый номер месяца, а две следующие цифры укажут число этого месяца. Например, если получилось число 2302, то дата рождения 23 февраля».

П е т я В о п р о с о в: «Ребята, попробуйте самостоятельно разобраться в этом фокусе, тем более что подсказка уже дана».

К а т я К н и ж к и н а: «Рассмотрим еще задания на угадывание числа, месяца рождения и возраста.

Число, когда вы родились, умножьте на 100, к полученному произведению прибавьте порядковый номер месяца, в котором вы родились, результат сложения умножьте на 100 и к последнему произведению прибавьте число ваших лет. Назовите число, которое у вас получилось.

Секрет разгадывания прост. В каждом из этих чисел две крайние справа цифры указывают количество лет, две следующие цифры — номер месяца рождения и две или одна оставшиеся цифры дают число этого месяца.

Например, если вы родились 12 апреля (12.04) и вам 11 лет, то $12 \cdot 100 + 4 = 1204$, $1204 \cdot 100 = 120\,400$, затем $120\,400 + 11 = 120\,411$. У вас получилось число, в котором последние две цифры указывают количество лет, а первые четыре укажут число и месяц рождения».

Упражнения Васи Задачкина

Восстановите первоначальную запись в следующих примерах [32]:

1)
$$\begin{array}{r} *1* \\ \times\ 3*2 \\ \hline *3* \\ +\ 3*2* \\ 12*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} **5 \\ \times\ 1** \\ \hline 2**5 \\ +\ 13*0 \\ *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ ** \\ \hline 5* \\ +\ ** \\ \hline 8** \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 6* \\ \times\ *** \\ \hline ** \\ +\ *** \\ ** \\ \hline ***6 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} *2* \\ \times\ *7 \\ \hline 22*8 \\ +\ *6*0 \\ \hline 1*46* \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} *5* \\ \times\ *8 \\ \hline 2*64 \\ +\ 1*3* \\ \hline *718* \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} *** \\ \times\ 1** \\ \hline 226* \\ +\ 90* \\ **2 \\ \hline 56*0000 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{r} **** \\ \times\ *2** \\ \hline 523** \\ +\ ****4 \\ *9641 \\ \hline *1002*** \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} ** \\ \times\ *3 \\ \hline *22 \\ +\ 1** \\ \hline **0* \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{r} 5** \\ \times\ **7 \\ \hline ***6 \\ +\ *2* \\ 10** \\ \hline ****** \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{r} *8* \\ \times\ 4*2 \\ \hline 7** \\ +\ 3** \\ **** \\ \hline *****0 \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{r} *** \\ \times\ *** \\ \hline *0** \\ +\ **5 \\ *1** \\ \hline *****8 \end{array}$$

13) Каждой букве соответствует единственная цифра, а двум различным буквам должны соответствовать две различные цифры.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}\text{ОДА}\\ \text{РИС}\end{array}\\
\hline
\text{ПАТ}\\
+\ \text{ИНД}\\
\text{СОР}\\
\hline
\text{СПОРТ}
\end{array}
$$

Тема 5 Тропинкой в удивительный мир деления

Занятия 1—3. Делимость. Различные способы деления. Признаки делимости. Простые и составные числа. Определение числа по остатку. Совершенные и дружественные числа. Числа-близнецы.

К а т я К н и ж к и н а: «Мы отправляемся тропинкой в удивительный мир деления, и я вам расскажу об этой математической операции.

Делимость — одно из основных понятий в теории чисел. Говорят, что число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c, что $a = b \cdot c$. Число a называется делимым, b — делителем, а результат деления c — частным. Например, число 28 делится на 7, потому что $28 = 7 \cdot 4$. Часто утверждение о том, что число a делится нацело на число b, выражают словами a кратно b (вспомните, какое число называется кратным числу b).

Из определения видно, что 0 делится на любое целое число, в результате получаем 0 ($0 : a = 0$, потому что $a \cdot 0 = 0$).

Для натуральных чисел деление нацело не всегда выполнимо, потому что результат деления двух натуральных чисел — не всегда натуральное число. Например, 25 не делится нацело на 6, потому что нет такого натурального числа, при умножении которого на 6 получилось бы 25. При делении 24 на 6 получаем 4, следовательно, при делении 25 на 6 деление выполняется не нацело и остается 1. Число 1 в данном случае называется остатком, а число 25 можно записать: $25 = 6 \cdot 4 + 1$, используя делитель, частное и остаток. Таким образом, разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком — это значит найти такие два числа q (частное) и r (остаток), чтобы выполнялось равенство: $a = b \times \times q + r$, где $0 \leq r < b$. При делении натуральных чисел нацело остаток при делении равен 0, в остальных случаях остаток меньше делителя.

Способы выполнения деления очень простые, сейчас каждый ученик после обучения делению многозначного числа на однозначное и многозначного числа на многозначное легко и быстро выполняет деление и получает результат. Правила выполнения деления не всегда были такими. Наши предки пользовались очень громоздкими и трудоемкими приемами, причем у различных народов были свои правила. В старину говорили: «Умножение — мучение, а с делением — беда». Существовало очень много различных приемов выполнения умножения и деления, и каждый учитель счетного дела своих учеников обучал определенным приемам. Усваивались эти приемы с большим трудом и очень долго. Людей, которые могли выполнять умножение и деление, было очень мало, считалось, что для выполнения этих операций нужно природное дарование, а простой человек этому научиться не мог.

Полезно знать некоторые свойства делимости для натуральных чисел:

1. Для любых натуральных чисел: $a : a = 1$ и $a : 1 = a$.
2. Если a делится на c и b делится на c, то сумма $a + b$ делится на c.
3. Если a делится на c и b делится на c, то разность $a - b$ $(a - b > 0)$ делится на c.
4. Если a делится на c или b делится на c, то произведение $a \cdot b$ делится на c.
5. Если натуральное число a делится на произведение натуральных чисел b и c, то a делится на каждое из чисел b и c.
6. Если a делится на b и b делится на c, то и a будет делиться на c».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, можно быстро определить, делится ли данное число на 4 или на 5?»

К а т я К н и ж к и н а: «Для того чтобы быстро узнать, делится ли одно число на другое, не прибегая непосредственно к выполнению деления, были установлены признаки делимости. Приведу основные признаки делимости натуральных чисел.

1. Число делится на 2, если оно заканчивается четной цифрой (2, 4, 6, 8) или нулем.
2. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

3. Число делится на 4, если две последние цифры в его записи нули или образуют число, делящееся на 4.

4. Число делится на 5, если оно заканчивается 0 или 5.

5. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

6. Число делится на 10, если оно заканчивается 0.

7. Число делится на 25, если две последние цифры в его записи нули или образуют число, делящееся на 25.

8. Число делится на 8, если три последние цифры в его записи нули или образуют число, делящееся на 8.

9. Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11 или эти суммы равны».

Петя Вопросов: «Катя, а что ты можешь рассказать о четных и нечетных числах?»

Катя Книжкина: «Натуральные числа, которые делятся нацело на 2, называются четными, а те, которые не делятся на 2, — нечетными. Греческий математик Пифагор (VI в. до н. э.) разделил натуральные числа на четные и нечетные. В натуральном ряду чисел каждое второе число четное: 2, 4, 6, ... Четное число можно обозначать $2n$ или $2p + 2$. Множитель 2 показывает, что число делится на 2. Нечетные числа соответственно обозначаются $2n - 1$ или $2p + 1$, где n — натуральные числа, а p — натуральные числа и нуль.

А сейчас я хочу рассказать о простых числах и составных. Число 12 имеет следующие делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12, а число 11 имеет только два делителя — единицу и само число 11. Числа, которые имеют только два делителя, — единицу и само себя, называются простыми. Числа, которые имеют более двух делителей, называются составными. Натуральное число единица не является ни простым числом, ни составным, потому что у него только один делитель. Вот первые десять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Простые числа интересовали математиков очень давно. Понятие простого числа возникло у пифагорейцев, они составляли таблицы простых чисел, рассматривали вопросы, связанные с количеством простых чисел и их распределением среди всех натуральных чисел. Около 300 лет до н. э. древнегреческий математик Евклид доказал, что простых чисел очень много и не существует среди натуральных чисел наибольшего простого числа.

А теперь интересный материал для самых любознательных.

Предположим, что число n — самое большое простое натуральное число, тогда произведение всех простых чисел, включая n, будет натуральным числом. Рассмотрим натуральное число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot n + 1$. Это число не делится ни на одно из простых чисел, которые мы перемножали, поэтому у этого натурального числа нет других делителей, кроме единицы и самого этого числа. Мы показали, что существует простое число, которое больше n, поэтому число n — не самое большое простое число. Эти рассуждения можно продолжать и дальше, значит, наибольшего простого числа не существует».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, а что такое “решето Эратосфена”?»

К а т я К н и ж к и н а: «Древнегреческий математик Эратосфен придумал способ, с помощью которого можно найти все простые натуральные числа от 1 до некоторого заданного числа. Этот метод называется «решетом Эратосфена». Для получения таблицы простых чисел

Эратосфен записывал числа на восковых дощечках и прокалывал составные числа. В результате дощечка была похожа на решето. Сейчас я покажу на примере первой сотни натуральных чисел, как найти с помощью указанного метода все простые числа.

Перед вами стоклеточный квадрат, в котором натуральные числа расставлены по порядку.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

В первой строчке числа от 1 до 10, во второй — от 11 до 20 и т. д. В последней строчке — числа от 91 до 100. Вы будете вычеркивать карандашом числа следующим образом. Поскольку 1 — не простое число и не составное, то его мы зачеркиваем. Затем, начиная от 2, зачеркиваем во всех строках числа, которые делятся на 2, не зачеркивая саму двойку, т. е. будут зачеркнуты все числа, которые стоят в четных столбиках. Потом, начиная от 3, зачеркиваем все числа из таблицы, которые делятся на три, оставляя незачеркнутой тройку. Затем числа, которые делятся на 5, оставляя незачеркнутой пятерку, потом — на 7, оставляя ее незачеркнутой. Следующее за семеркой простое число 11, но все числа из первой сотни, которые делятся на него, уже зачеркнуты. Оставшиеся незачеркнутыми числа из таблицы являются простыми. Теперь посмотрите на таблицу. Похожа она на “решето”?»

Вася Задачкин: «Обратите внимание, что в первой строчке четыре простых числа, а в последней — только одно. В остальных строчках либо два, либо три простых числа. Еще в древности было замечено, что чем дальше мы продвигаемся по натуральному ряду чисел, тем меньше натуральных простых чисел встречается и располагаются они нерегулярно. Наибольшее известное сегодня простое число имеет в записи более двадцати пяти тысяч знаков».

Катя Книжкина: «Вы уже знаете, что любое число можно единственным образом разложить на простые сомножители. Умение раскладывать числа на простые сомножители используется для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК). Правила нахождения НОД и НОК вы уже знаете (если забыли, то повторите)». Для решения задач вам будет полезна формула:

НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$ для любых натуральных чисел a и b.

Контрольные вопросы Пети Вопросова

1. Что значит разделить нацело натуральное число a на натуральное число b?

2. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25. Попробуйте самостоятельно придумать признаки делимости на 6 и 100.

3. Что значит разделить с остатком натуральное число a на натуральное число b?

4. Может ли остаток при делении натуральных чисел быть больше делителя; равен делителю?

5. Каждое слагаемое суммы делится на некоторое натуральное число. Что можно сказать о делимости суммы на это натуральное число?

6. Уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое натуральное число. Что можно сказать о делимости разности на это натуральное число?

7. Один из множителей делится на некоторое число. Будет ли произведение делиться на это натуральное число?

8. Какие числа называются простыми; составными?

9. Какие числа называются четными; нечетными?

10. Можно ли назвать самое большое четное число; простое число; составное число?

11. Назовите пятизначное число, все цифры которого различны, делящееся на 4; на 25; на 8.

12. Некоторое натуральное число делится на 7, будет ли делиться на 7 число, следующее за ним в натуральном ряду?

13. Существует ли натуральное число, которое не является ни простым, ни составным?

14. Существует ли четное простое число?

15. В каких десятках первой сотни натуральных чисел имеется три и только три простых числа?

16. Есть ли среди натуральных чисел первой сотни такой десяток, в котором было бы лишь одно простое число?

17. Сформулируйте правила нахождения НОД и НОК чисел.

18. Четной или нечетной будет сумма двух четных чисел? А трех нечетных?

19. Маша говорит, что знает четыре числа, сумма и произведение которых — нечетные числа. Права ли Маша?

20. Можно ли заплатить без сдачи:

а) 20 000 рублей семью купюрами по 1, 5 и 10 тысяч рублей;

б) 20 000 рублей семью купюрами по 1, 5 тысяч рублей;

в) 25 000 рублей восемью купюрами по 1 и 5 тысяч рублей?

Упражнения Васи Задачкина

1. Четырехзначное число, у которого все цифры одинаковые, имеет только два простых делителя. Что это за число?

2. Как изменится частное двух чисел, если делимое увеличить в 20 раз?

3. В частном делитель четный. Как изменится частное двух чисел, если делитель уменьшить в 2 раза?

4. Как изменится частное и остаток, если к делимому прибавить делитель?

5. В каких случаях частное двух чисел равно: а) одному из них; б) каждому из них?

6. Напишите пятизначное число, которое делится на:
а) 3; б) 4; в) 6; г) 9; д) 25.

7. Какой цифрой может заканчиваться число 7142*, если оно делится на:
а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 9?

8. Какую цифру следует поставить вместо символа «*» в числе 5471*6, чтобы оно делилось на:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 9?

9. Запишите все трехзначные числа в промежутке от 500 до 550, кратные:
а) 3; б) 9.

10. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

11. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

12. Дана сумма: $28 + 31 + 61 + 92 + 120$. Будет ли она делиться на 3?

13. К двузначному числу прибавили 5, сумма оказалась кратной 5. Когда из него вычли 3, разность оказалась кратной трем. А когда его разделили на 2, оказалось, что и частное делится на 2. Найдите число.

14. К двузначному числу приписано такое же число. Может ли образовавшееся четырехзначное число быть простым?

15. Покажите, что сумма двух любых последовательных нечетных чисел делится на 4.

16. Какое число при делении его на любое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 каждый раз дает в остатке 1?

17. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае в остатке получили 4, а во втором — 18. На какое число делили?

18. Можно ли утверждать, что среди любых трех последовательных четных чисел (или же трех последовательных нечетных чисел) всегда есть число, кратное 3?

19. Числа a и b — взаимно простые. Будут ли взаимно простыми числа $a + b$ и $a \cdot b$?

20. Произведение двух чисел равно 5292, а их НОК равно 252. Найдите НОД этих чисел.

21. Произведение двух чисел равно 21 600, а их НОД равен 60. Найдите НОК этих чисел.

22. Найдите разность НОК и НОД чисел 330 и 44.

23. Найдите наибольшее целое число, дающее при делении на 13 с остатком частное 17.

24. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 100, сумма цифр которого равна 100.

25. Найдите наибольшее число, в записи которого каждые две соседние цифры образуют число, делящееся на 17.

26. Сколько чисел от 1 до 1000 включительно не делятся ни на 2, ни на 5?

27. Напишите наименьшее целое число, составленное из всех цифр, которое делится на: а) 5; б) 20.

28. Найдите наибольшее трехзначное число, кратное 3, но не кратное 9.

29. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

30. Объясните, почему разность между двумя соседними простыми числами (кроме чисел 2 и 3) равна четному числу.

31. Сколько есть четырехзначных чисел, все цифры которых четные?

32. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Тема 6 Тропинкой с математикой во времени

Занятия 1—4. Математические задачи-загадки античных времен. Старинные занимательные истории по математике. Занимательные задачи. Задачи математического содержания на основе народных сказок. Некоторые задачи русских писателей.

Катя Книжкина: «Ребята, мы с вами отправляемся тропинкой с математикой во времени и начинаем свое путешествие с *математических задач-загадок античных времен*. В занимательной математической литературе я нашла много интересного и сейчас вас с этим материалом познакомлю.

Во времена античности большой популярностью пользовались задачи-загадки. В Древней Греции были распространены многочисленные виды загадок: числовые, буквенные, загадки с рисунками и др., а также составлялись сборники задач. В VIII в. до н. э. наибольшей популярностью пользовался сборник задач «Греческой антологии», составленный в стихотворной форме, в котором были написаны и знаменитые поэмы Гомера «Илиада» и «Одиссея».

В основе многих задач, составленных математиками Древней Греции, часто лежали легенды и мифы — истории из жизни богов. Приведу примеры таких задач.

Собрались однажды на Олимпе боги, и Геракл, сын богини Земли Геры, рассказал им о состязании в стрельбе из лука с самым метким богом-стрелком Евритом и кентавром Хироном, от которого произошло созвездие Стрельца.

«Было у нас полторы дюжины стрел (дюжина равна 12). Каждому досталось по 6 стрел. Мы их пометили и начали соревнование. Еврит первой стрелой выбил 3 очка. Мне повезло больше: 2 стрелы — и сразу 22 очка. Когда мы закончили выпускать свои стрелы, то оказалось, что каждый из нас набрал поровну, по 71 очку. И тогда мы решили, что победителем будет тот, кто сделал самый удачный выстрел — 50 очков, т. е. попал в центр мишени. Угадайте, кто выиграл это соревнование».

Если вы затрудняетесь ответить, то предлагаю решение задачи.

Думали боги, думали, но не смогли назвать победителя. И тогда Геракл выписал молнией на скале очки Еврита, Хирона и свои. У него получилась следующая запись:

25	20	20	3	2	1
25	20	10	10	5	1
50	10	5	3	2	1

Если Гераклу первые 2 выстрела принесли 22 очка, то его достижениям соответствует первый ряд чисел. Ведь только там можно набрать столько очков двумя выстрелами, если попадешь в 20 и 2.

Но тогда первый выстрел, который принес Евриту всего 3 очка, может относиться только к третьему набору чисел: ведь первый-то уже «забрал» себе Геракл! Таким образом, вторая строка соответствует выстрелам Хирона. Получается, что в третьей строке находится и высшее достижение этого состязания — 50 очков. Значит, победил Еврит: он сделал самый точный выстрел!

Предлагаю еще одну задачу.

Самым искусным кузнецом и мастером всех ремесел в Греции был бог Гефест. Чего только не делал Гефест-умелец! Для колхидского царя вырыл он под виноградной лозой четыре чудесных источника, в которых не переводились молоко, вино, масло и вода; Ахиллу сковал прекрасное оружие и замечательный щит. А на этот раз Зевс приказал ему изготовить для каждого из двенадцати богов по три волшебные амфоры: одну — для лектора, одну — для амброзии и одну — для благовоний. Чтобы достать металл для изготовления этих амфор, Зевс отправил гонцов в разные концы света. И через три года странствий и подвигов возвратились посланцы и привезли ровно три дюжины больших кусков металла. «Сколько кусков, столько должно быть и амфор», — сказал Зевс Гефесту. Гефест лишь улыбнулся в ответ, ведь во время изготовления амфоры на станке остается стружка. Из стружки, оставшейся после 6 амфор, можно выплавить новый слиток металла, которого хватит на новую амфору.

Подскажите Зевсу, сколько амфор может сделать бог-кузнец Гефест из 36 привезенных ему кусков драгоценного металла?»

Вася Задачкин: «Если вы не справились самостоятельно с решением, то предлагаю разобраться в моем решении.

У Гефеста было 36 кусков металла. Из каждых 6 кусков Гефест выплавляет 6 амфор (по амфоре из куска), а из оставшейся после выплавки стружки — еще одну амфору. Таким образом, из 36 кусков можно сделать дополнительно еще 6 амфор ($36 : 6 = 6$). Но стружки, которая останется после этих 6 амфор, хватит еще на одну новую амфору. Значит, Гефест выточил 43 амфоры ($36 + 6 + 1 = 43$), 36 — для богов, а 7, сделанных им дополнительно из стружки, Зевс оставил ему в подарок.

Ответ: 43».

Катя Книжкина: «А теперь я познакомлю вас с *задачами математического содержания на основе народных сказок*.

Во времена античности многие задачи составлялись на основе народных сказок. Вы также можете составить такие задачи, выбрав за основу сказочный сюжет или сказочных героев. Приведу некоторые примеры задач на основе народных сказок.

Крестьянин пришел к царю и попросил: «Царь, позволь мне взять из твоего сада одно яблоко». Царь сказал: «Мой сад огорожен тремя заборами. В каждом заборе есть только одни ворота и около каждых ворот стоит сторож. Если скажешь, сколько яблок нужно тебе взять, чтобы выполнить следующее условие: первому сторожу отдать половину яблок, которые возьмешь, и еще одно яблоко; второму сторожу отдашь половину из тех, что остались, и еще одно; третьему сторожу отдашь половину из того, что осталось, и еще одно яблоко, а тебе, чтобы осталось только одно яблоко, то я разрешу тебе пойти в сад». Крестьянин подумал немного и ответил царю. Царь разрешил крестьянину пойти в сад. Какое число назвал крестьянин?»

П е т я В о п р о с о в: «Ребята, попробуйте решить эту задачу сами, а если не справитесь, то Вася поможет вам».

В а с я З а д а ч к и н: «Предлагаю вам свое решение. Заметим, что одно яблоко останется у крестьянина после того, как он отдаст третьему сторожу половину какого-то числа яблок и еще одно. Значит,

$(1 + 1) \cdot 2 = 4$ (яблока) — было перед тем, как отдать третьему сторожу, или после того, как отдал второму сторожу;

$(4 + 1) \cdot 2 = 10$ (яблок) — было перед тем, как отдать второму сторожу, или после того, как отдал первому сторожу;

$(10 + 1) \cdot 2 = 22$ (яблока) — было перед тем, как отдать первому сторожу, или нужно было взять из сада.

Подставляя полученный ответ в условие задачи, проверяем его. Можно записать решение задачи числовым выражением $(((1 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2$, значение которого равно 22.

Ответ: 22 яблока» [11].

Катя Книжкина: «Дедка вдвое сильнее бабки, бабка втрое сильнее внучки, внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее кошки, кошка вшестеро сильнее мышки. Дедка, бабка, внучка, Жучка и кошка вместе с мышкой могут вытащить репку, а без мышки — не могут. Сколько надо позвать мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку?»

Вася Задачкин: «Я предлагаю решить эту задачу так.

Кошка заменяет 6 мышек. Жучка заменяет $5 \cdot 6$ мышек. Внучка заменяет $4 \cdot 5 \cdot 6$ мышек. Бабка заменяет $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ мышек. Дедка заменяет $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ мышек. Итого потребуется: $(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + (4 \cdot 5 \cdot 6) + (5 \cdot 6) + 6 + 1 = 1237$ мышек.

Ответ: 1237 мышек».

Петя Вопросов: «Я тоже хочу предложить вам задачу.

В дремучем Муромском лесу из-под земли бьют десять источников мертвой воды — от № 1 до № 10. Из первых девяти источников мертвую воду может взять каждый, но источник № 10 находится в пещере Кощея, в которую никто, кроме самого Кощея, попасть не может.

На вкус и цвет мертвая вода ничем не отличается от обыкновенной, однако если человек попьет из какого-нибудь источника, он умрет. Спасти его может только одно: если он запьет ядом из источника, номер которого больше. Например, если он попьет из седьмого источника, то ему надо обязательно запить ядом № 8, 9 или 10. Если он выпьет не седьмой яд, а девятый, ему может помочь только № 10. А если он выпьет сразу десятый яд, то ему ничто не поможет.

Иванушка-дурачок вызвал Кощея на дуэль. Условия дуэли были такие: каждый приносит с собой кружку с жидкостью и дает ее выпить своему противнику. Кощей обрадовался: «Ура! Я дам яд № 10, и Иванушка-дурачок не сможет спастись! А сам выпью яд, который Иванушка-дурачок мне принесет, запью его своим десятым и спасусь!»

В назначенный день оба противника встретились в условленном месте. Они честно обменялись кружками и выпили то, что в них было. Каковы же были радость и удивление обитателей Муромского леса, когда оказалось, что Кощей умер, а Иванушка-дурачок остался жив!

Только Василиса Премудрая догадалась, как удалось Иванушке победить Кощея. Попробуйте догадаться и вы. А если у вас возникнут проблемы, то Вася и Катя вам помогут».

Решения Кати и Васи:

«В зависимости от того, когда выпит яд, он может служить и ядом, и противоядием. Иванушка дал Кощею обыкновенной воды, поэтому яд № 10, выпитый Кощеем как противоядие, подействовал как яд.

Перед тем как выпить яд № 10, который дал Кощей, Иванушка выпил любой другой яд, поэтому Кощеев яд стал противоядием».

Катя Книжкина: «Попробуйте самостоятельно решить еще одну задачу.

Жили-были Незнайка и семь его друзей-коротышек. Однажды он на День рождения приготовил квадратный пирог и пошел за соком. Пришел первый коротышка, разрезал пирог на четыре квадратных куска и пошел искать Незнайку. Потом пришел второй коротышка и разрезал один квадратный кусок пирога на четыре квадратных куска и пошел искать остальных. Потом пришел третий коротышка и опять разрезал один квадратный кусок пирога на четыре квадратных куска и пошел искать остальных. То же самое проделали все остальные коротышки.

Сколько квадратных кусков пирога лежало на столе после ухода последнего коротышки?»

В а с я З а д а ч к и н: «Я уже решил задачу:

Каждый коротышка резал один квадратный кусок пирога, а оставлял 4, т. е. добавлял 3 квадратных куска пирога. Следовательно, после ухода седьмого коротышки на стуле будет лежать $1 + (3 \cdot 7) = 22$ квадратных куска пирога.

Ответ: 22 квадратных куска пирога».

К а т я К н и ж к и н а: «Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым.

— Вот тебе меч-кладенец, — сказала царевичу Баба-яга. — Одним ударом ты можешь срубить Змею либо голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову — новая вырастет; срубишь хвост — два новых вырастут; срубишь два хвоста — голова вырастет; срубишь две головы — ничего не вырастет.

За какое наименьшее число ударов Иван-царевич может срубить Змею Горынычу все головы и все хвосты?!»

В а с я З а д а ч к и н: «Ребята, давайте решать задачу вместе.

Иван-царевич может срубить Змею Горынычу все головы и все хвосты за 9 ударов. Первыми тремя ударами он срубит по одному хвосту за каждый удар — останутся три головы и шесть хвостов. Вторыми тремя ударами он срубит по два хвоста за каждый удар — останется шесть голов. Последними тремя ударами он срубит по две головы за каждый удар — ничего не останется.

Давайте подумаем, может ли Иван-царевич победить Змея Горыныча, нанеся меньше или больше чем 9 ударов.

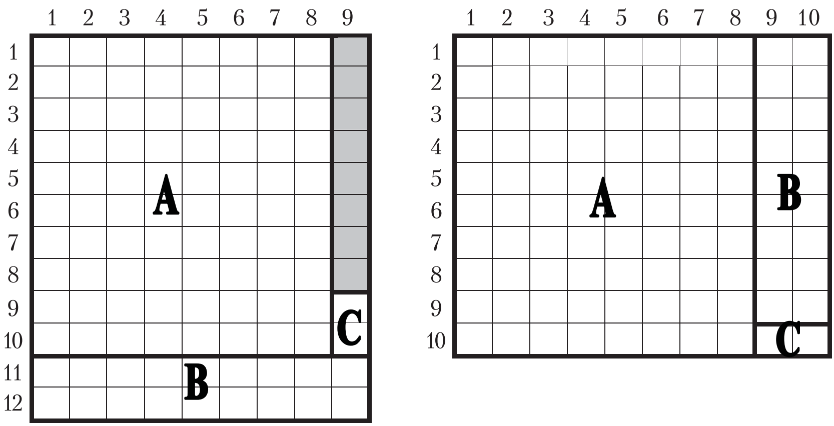
При бо́льшем количестве ударов, конечно же, может. Пока есть хотя бы одна голова, Иван-царевич может сколько угодно раз отрубать Змею одну голову. Вид Змея при этом не изменится, а число ударов может быть любым. А вот ударив меньше чем 9 раз, убить Змея невозможно. Последним ударом Иван-царевич должен срубить две головы (это единственный удар, после которого ничего не вырастет). Значит, нужно действовать так, чтобы нечетное число голов (три головы у Змея уже есть) стало четным числом. Голову можно получить, срубая два хвоста. Значит, надо сделать так, чтобы общее число хвостов было четное и при делении на 2 давало нечетное число, т. е. как минимум у Змея должно быть шесть хвостов. Три хвоста уже есть — надо добавить еще три. Единственная возможность добавить хвост — отрубить один хвост, тогда вырастут два хвоста. Значит, надо отрубать по одному хвосту 3 раза. Всего хвостов станет шесть. Затем еще тремя ударами отрубить по два хвоста. Хвостов не останется. Но прибавятся три головы. А всего голов станет шесть. Последними тремя ударами нужно отрубить по две головы. Следовательно, предложенный нами способ действительно самый короткий.

Ответ: 9 ударов».

К а т я К н и ж к и н а: «В Волшебной стране свои волшебные законы природы, один из которых гласит: «Ковер-самолет будет летать только тогда, когда имеет прямоугольную форму».

У Ивана-царевича был ковер-самолет размером 9×12. Как-то раз Змей Горыныч подрался и отрезал от этого ковра маленький коврик размером 1×8. Иван Царевич очень расстроился и хотел было отрезать еще кусочек 1×4, чтобы получился прямоугольник 8×12, но Василиса Премудрая предложила поступить по-другому. Она разрезала ковер на три части, из которых волшебными нитками сшили квадратный ковер-самолет размером 10×10. Сможете ли вы догадаться, как Василиса Премудрая переделала испорченный ковер?»

Решение Васи Задачкина:



Катя Книжкина: «Сейчас я предлагаю вам несколько простых задач.

1. Баба-яга принесла на обед Кощею Бессмертному 33 летучие мыши. Он съел ровно на 13 мышей больше, чем осталось. Сколько мышей съел Кощей?

2. Илья Муромец вместе с конем весит 720 кг. Сколько весит Илья, если конь без Ильи весит в 5 раз больше, чем Илья без коня?

3. В сказке «Маугли» удав Каа с Маули на спине проплыл по течению реки 72 км со скоростью 42 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, назад — за 3 часа. Найдите скорость реки».

Вася Задачкин: «Предлагаю вам свои решения этих задач.

1. Вычтя из 33 число 13, мы узнаем, сколько нужно мышей, чтобы осталось столько же, сколько он съел, т. е. 20 мышей. Разделив на 2, получим, сколько осталось, — 10. Тогда он съел на 13 больше, т. е. 23.

Ответ: 23 мыши.

2. Вес Ильи — 1 часть, вес коня — 5 частей. Всего 6 частей. 720 : 6 = 120.

Ответ: 120.

3. Следует найди скорость против течения. Всего Каа проплыл 72 км. Значит, скорость против течения 72 : 3 = $= 24\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$. Разность скоростей по течению и против течения — 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Значит, по течению река добавляла 9 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения отнимала 9 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Скорость реки равна 9 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: 9 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$».

Упражнения Васи Задачкина

1. У трех граций было одинаковое число плодов, и, встретив девять муз, каждая грация отдала каждой из них по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой из граций до встречи с музами?

2. «Помогу тебе, Иван, найти Василису Прекрасную, — сказала Баба-яга. — По душе ты мне пришелся. Вот тебе волшебный клубок. Он приведет тебя к волшебному камню. От этого камня идут три дороги: на одной из них ты встретишь свою смерть, на другой с тобой ничего не случится, третья дорога приведет тебя к Василисе Прекрасной. Но учти, что все три записи на камне неверные — сделаны Кощеем Бессмертным». Бросил Иван клубок на землю. Покатился он, а Иван за ним. Долго ли, коротко ли шел Иван, но пришел он к огромному камню. На камне написано: «Пойдешь налево — встретишь свою смерть», «Пойдешь направо — вызволишь из неволи Василису Прекрасную», «Пойдешь прямо — с тобой что-то случится». Помогите ему вызволить Василису Прекрасную.

3. По тропинке вдоль кустов
Шло одиннадцать хвостов.
Сосчитать я также смог,
Что шагало тридцать ног.
Это вместе шли куда-то

Петухи и поросята.
А теперь вопрос таков:
Сколько было петухов?

И узнать я был бы рад,
Сколько было поросят?

4. Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей,
На всяком костыле по семи сучков,
На каждом сучке по семи кошелей,
В каждом кошеле по семи пирогов,
А в каждом пироге по семи воробьев.
Сколько всего?

Задачи 5 и 6 из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

5. Собака заметила зайца в 150 саженях от себя. Заяц пробегает за 2 минуты 500 саженей, а собака — за 5 минут 1300 саженей. За какое время собака догонит зайца?

6. На мельнице имеется 3 жернова. На первом из них за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором — 54 четверти, а на третьем — 48 четвертей. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна за наименьшее время на этих трех жерновах. За какое наименьшее время можно смолоть зерно и сколько для этого на каждый жернов надо зерна насыпать?

7. Решите следующие задачи из рукописи «Задачи для изощрения ума юношества».

а) Собака гонится за кроликом, который находится впереди нее в 150 футах, и при каждом прыжке делает 9 футов, в то время как кролик прыгает на 7 футов. За сколько прыжков собака догонит кролика?

б) Через реку надо перевезти волка, козу и кочан капусты. На лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как их перевезти, если волк хочет съесть козу, а коза — капусту?

8. Решите две задачи из XII главы «Книги абака», свидетельствующие о связях математики Востока и Запада. Первая задача ранее встречается у средневосточного математика Ибн ал-Хайсама (X—XI вв.), вторая — в китайских рукописях.

а) Найдите числа, кратные 7 и дающие в остатке от деления на 2, 3, 4, 5, 6 единицу.

б) Найдите число, при делении на 3, 5, 7 дающее соответственно остатки 2, 3, 2.

9. Решите задачу из средневековых русских рукописей.

Идет семь баб,
У всякой бабы по семи посохов,
На всяком посохе по семи сучков,
На всяком сучку по семи кошелей,
Во всяком кошеле по семи пирогов,
Во всяком пироге по семи воробьев,
Во всяком воробье по семи пупков.

Сколько всего баб, посохов, сучков, кошелей, пирогов, воробьев и пупков?

10. Составьте сами задачу, аналогичную предыдущей, положив в основу числа: а) 5; б) 10; в) 12.

Решите некоторые задачи, опубликованные в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого.

11. а) В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Нужно узнать, сколько косцов за три часа выпьют такой же бочонок кваса.

б) Говорит дед внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в три раза». Как разделить орехи?

в) Идет один человек в другой город и проходит в день 40 верст, а другой человек идет навстречу ему из другого города и в день проходит по 30 верст. Расстояние между городами 700 верст. Через сколько дней путники встретятся?

12. Один человек купил три курицы и заплатил за них 46 копеек. Первая курица несла по три яйца через 4 дня, вторая — по 2 яйца через 3 дня, а третья — по 1 яйцу через 2 дня. Продавал он яйца по 5 штук за полкопейки. За какое время окупятся куры?

13. Путешественник идет из одного города в другой 10 дней, а второй путешественник тот же путь проходит за 15 дней. Через сколько дней встретятся путешественники, если выйдут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

14. 5 волов и 3 барана стоят 13 золотых монет, 2 вола и 8 баранов стоят 12 золотых монет. Сколько стоит 1 вол и 1 баран?

Вася Задачкин: «Многие русские писатели с удовольствием изучали математику и даже включали математические задачи в свои литературные произведения. Рассмотрим некоторые из них».

15. Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого. Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим зато выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим. Меньшие разделили эти деньги между собою и тогда у всех 5 братьев стало поровну.

Много ли стоили дома?

16. Задача из рассказа А. П. Чехова «Репетитор».

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого сукна, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное — 3 руб.

Решите задачи (из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого).

17. Задача о хождении юношей.

Некий юноша пошел с Москвы к Вологде. А идет не всякий день по 40 верст. А другой пошел после него на другой день. И идет не всякий день по 45 верст. Через сколько дней второй юноша постиг прежнего юношу?

18. Один воин вышел из города и проходил по 12 верст в день, а другой вышел одновременно и шел таким образом: в первый день прошел 1 версту, во второй день — 2 версты, в третий день — 3 версты, в четвертый — 4 версты, в пятый — 5 верст и так прибавлял каждый день по одной версте, пока не настиг первого.

Через сколько дней второй воин настигнет первого?

19. Пошел охотник на охоту с собакой. Идут они лесом, и вдруг собака увидела зайца. За сколько прыжков собака догонит зайца, если расстояние, которое пробегает собака до зайца, равно 40 прыжков, и расстояние, которое пробегает собака за 5 прыжков, заяц пробегает за 6 прыжков? (В задаче подразумевается, что прыжки делаются одновременно и зайцем, и собакой.)

20. Задача А. Н. Страннолюбского. Некто на вопрос о возрасте двух его сыновей отвечал: «Первый мой сын втрое старше второго, а обоим им вместе столько лет, сколько было мне 29 лет назад; мне теперь 45 лет». Найдите лета обоих сыновей.

Тема 7 Тропинкой в занимательное геометрическое путешествие

Занятия 1—6. Геометрические путешествия. Задачи на вычерчивание фигур без отрыва карандаша от бумаги. Задачи на разрезание. Простейшие многогранники (прямоугольный параллелепипед, куб), изготовление моделей простейших многогранников. Простейшие задачи прикладного характера. Геометрические соревнования.

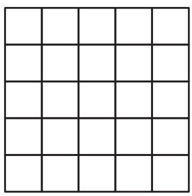
Катя Книжкина: «Геометрия — одна из самых древних наук на Земле. Название «геометрия» древнегреческого происхождения и составлено из двух слов *ge,* что означает «Земля», и *metreo* — «измеряю». Таким образом, геометрия — наука о землемерии. Первые геометрические факты, дошедшие до нас, встречаются в египетских папирусах и в вавилонских клинописных дощечках. Возникновение и развитие науки «Геометрия» связано с практической деятельностью человека, и поэтому многие геометрические термины и названия фигур связаны с конкретными предметами. Например, термин «линия» происходит от латинского *linum*, что означает «лен», «льняная веревка». Древнегреческий историк Геродот, живший в V в. до н. э., написал о зарождении геометрии в Древнем Египте (около 2 тыс. лет до н. э.) следующее: «Сезоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию и взымал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

Еще в древности развивались ремесла, торговля, земледелие и строительство. Все это требовало знаний свойств геометрических фигур и умения измерять и вычислять площади и объемы различных тел и фигур. Таким образом, шло постоянное развитие науки «Геометрия».

Древнегреческий ученый Евклид в III в. до н. э. написал книгу «Начала», в которой он подытожил весь накопленный к тому времени геометрический материал. В ней так хорошо был представлен геометрический материал, что ее переводы или незначительные ее переработки на протяжении 2 тыс. лет использовались во всем мире в качестве учебников по геометрии. Современные школьные учебники, по которым вы будете изучать геометрию, также содержат переработанный геометрический материал из «Начал» Евклида.

Свое знакомство с геометрией мы начнем с интересных занимательных заданий».

П е т я В о п р о с о в: «Сколько прямоугольников вы видите на рисунке?»



В а с я З а д а ч к и н: «Не спешите с ответом. Обратите внимание на то, что спрашивается не о числе квадратов (хотя квадрат это прямоугольник, у которого все стороны равны), а о числе прямоугольников. В задании ничего не говорится об их размерах, поэтому посчитайте общее количество прямоугольников, которые не являются квадратами. Чтобы не потерять ни одного прямоугольника, выберите для себя систему подсчета».

Петя Вопросов: «Сколько вы можете насчитать на шахматной доске различно расположенных квадратов?»

Вася Задачкин: «*Подсказка.* Шахматная доска 8×8 содержит 64 маленькие клеточки.

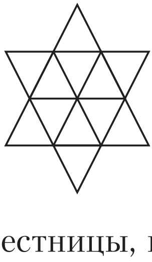
В этом задании нужно посчитывать количество любых квадратов, расположенных на шахматной доске».

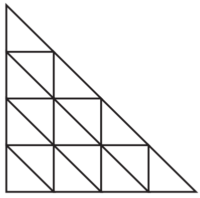
Катя Книжкина: «У меня тоже есть несколько интересных заданий.

1. Возьмите небольшой прямоугольный лист бумаги и ножницы. Сколько прямолинейных разрезов надо сделать, чтобы получить четыре куска? Чтобы получить 12 кусков? Складывать бумагу и разрезать одновременно два куска не разрешается.

2. У крышки стола 4 угла. Сколько будет углов у крышки, если один из углов отпилить?

3. Сколько разных треугольников изображено на каждом из рисунков?





4. Две лестницы, имеющие одинаковую высоту и основание, покрыты ковровыми дорожками. Одинаковой ли длины эти дорожки, если одна лестница состоит из

4 ступеней, а другая — из 8 ступеней? Вычислите длины дорожек, если высота лестницы равна 1 м, а основание ее — 2 м».

Петя Вопросов: «Предлагаю ребятам две задачи о прямоугольниках и одну о квадрате.

1. Из трех одинаковых прямоугольников, у каждого из которых длины сторон соответственно равны 3 см и 2 см, составьте и изобразите фигуру с периметром 22 см. Какой будет площадь этой фигуры?

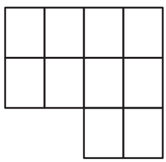
2. Из восьми одинаковых прямоугольников, длины сторон которых соответственно равны 3 см и 2 см, составьте и изобразите фигуру с периметром 34 см. Определите площадь полученной фигуры.

3. Какую часть квадратного метра составляет квадрат со стороной полметра?»

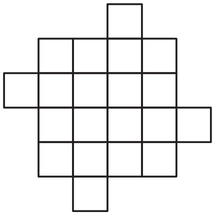
Упражнения Васи Задачкина

Вася Задачкин: «Я с ребятами предлагаю вам интересные *задачи на разрезание*.

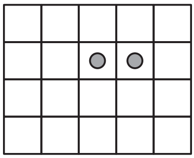
1. Разрежьте данную фигуру на две равные части.

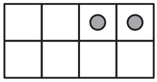


2. Разделите фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Придумайте два способа решения.

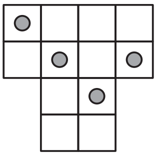


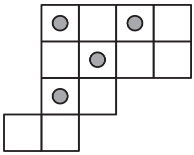
3. Разрежьте фигуры, изображенные на рисунке, на две равные части по линиям сетки так, чтобы в каждой из частей был кружок.





4. Разрежьте фигуры, изображенные на рисунке, на четыре равные части по линиям сетки так, чтобы в каждой из частей был кружок.

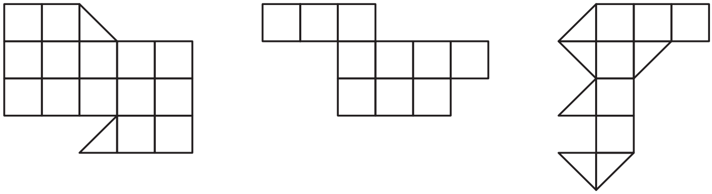




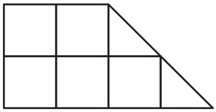
5. На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 5×5 клеток. Придумайте, как разрезать его по линиям сетки на 7 различных прямоугольников.

6. Разделите квадрат размером 4×4 клетки на две равные части так, чтобы линия разрезов шла по сторонам клеток. Найдите все возможные способы решения. (Фигуры, получившиеся при разных способах разрезания, должны быть разными.)

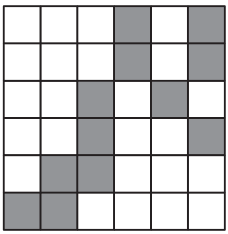
7. Разделите фигуры, изображенные на рисунке, на две равные части. (Разрезать можно не только по сторонам клеток, но и по их диагоналям.)



8. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части. (Разрезать можно не только по сторонам клеток, но и по их диагоналям.)



9. Разделите квадрат размером 6×6 клеток, изображенный на рисунке, на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три закрашенные клетки. (Разрезать можно только по линиям сетки.)»



Катя Книжкина: «У меня для ребят тоже есть две интересные задачи.

10. Основание Карфагена

Об основании древнего города Карфагена существует следующее предание. Дидона, дочь тирского царя, потеряв мужа, убитого рукой ее брата, бежала в Африку и высадилась со многими жителями Тира на ее северном берегу. Здесь она купила у нумидийского царя столько земли, «сколько занимает воловья шкура». Когда сделка состоялась, Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие ремешки и благодаря такой уловке охватила участок земли, достаточный для сооружения крепости. Так будто бы возникла крепость Карфаген, к которой впоследствии был пристроен город.

Попробуйте вычислить, какую площадь могла, согласно этому преданию, занять крепость, если считать, что воловья шкура имеет поверхность 4 кв. м, а ширину ремешков, на которые Дидона ее разрезала, принять равной 1 мм.

11. Квадрат со стороной 20 см разрезали на квадратики со стороной 1 см. Прикладывая получившиеся квадратики друг к другу, получили полоску шириной 1 см. Найдите длину этой полосы».

В а с я З а д а ч к и н: «Сейчас будем решать интересные *задачи с использованием спичек.*

Для решения этих задач нужна коробка со спичками или счетными палочками [11, 17].

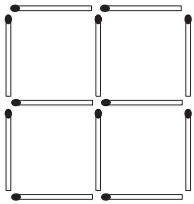
1. Положите 3 спички на стол так, чтобы их головки не касались поверхности стола и друг друга.

2. Двенадцать спичек выложены так, как показано на рисунке. Сколько здесь квадратов? Выполните следующие задания:

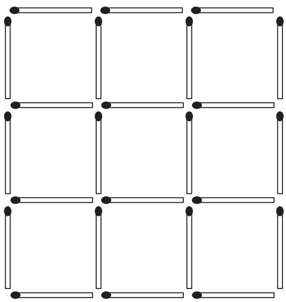
а) уберите 2 спички так, чтобы образовалось 2 неравных квадрата;

б) переложите 3 спички так, чтобы образовалось 3 равных квадрата;

в) переложите 4 спички так, чтобы образовалось 10 квадратов.



3. Двадцать четыре спички выложены так, как показано на рисунке.



Сколько здесь квадратов? Выполните следующие задания:

а) уберите 4 спички так, чтобы образовалось 5 равных квадратов;

б) уберите 6 спичек так, чтобы образовалось 5 равных квадратов;

в) переложите 12 спичек так, чтобы образовалось 2 равных квадрата;

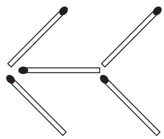
г) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 4 равных квадрата;

д) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 3 квадрата;

е) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 2 квадрата.

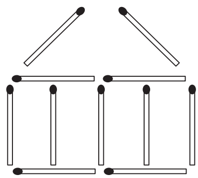
4. Сделайте из 5 спичек 5 одинаковых треугольников и 1 пятиугольник.

5. Переложите 3 спички так, чтобы стрела поменяла направление на противоположное.

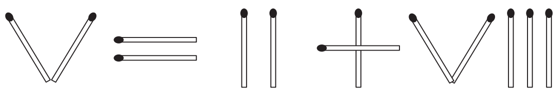


6. Из 10 спичек составьте 3 квадрата двумя способами.

7. Переложите 4 спички так, чтобы получилось 15 квадратов.



8. Из спичек составлено неверное равенство (см. рисунок). Переставьте одну спичку так, чтобы равенство стало верным.



9. В трех кучках лежат спички, по 10 спичек в каждой. Играют Аня и Вова. Игрок забирает несколько спичек, но только из какой-либо одной кучки. Начинает Аня. Побеждает тот, кому достанется последняя спичка. Может ли кто-нибудь из игроков играть так, чтобы наверняка выиграть, как бы ни старался другой?

10. Задание П е т и В о п р о с о в а: «48 спичек разложены на три неравные кучки. Если из первой кучки переложить во вторую столько спичек, сколько в этой второй кучке имелось, затем из второй в третью переложить столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться, и из третьей переложить в первую столько спичек, сколько в этой первой кучке будет тогда иметься, то спичек во всех кучках станет одинаковое количество. Сколько спичек было в каждой кучке первоначально?»

В а с я З а д а ч к и н: «Ребята, попробуйте самостоятельно решить это задание, используя указание.

Указание. Рассмотрите процесс перекладывания спичек “с конца”».

П е т я В о п р о с о в: «Если есть проблемы с решением задания, предлагаю свое решение. Так как 48 спичек оказались разложены в 3 равные кучки, то в этих кучках было по $48 : 3 = 16$ (спичек). Рассмотрим процесс перекладывания спичек «с конца».

1. Из третьей переложить в первую столько спичек, сколько в этой первой кучке будет тогда иметься, — в первой кучке стало 16 спичек, притом что добавили в нее столько, сколько там на тот момент было. Значит, в первой кучке на предыдущем шаге стало $16 : 2 = 8$ (спичек), а в третьей — $16 + 8 = 24$ (спички).

2. Из второй в третью переложить столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться, — в третьей кучке стало 24 спички, притом что добавили в нее столько, сколько там на тот момент было. Значит, в третьей кучке на предыдущем шаге стало $24 : 2 = 12$ (спичек), а во второй — $16 + 12 = 28$ (спичек). В первой кучке пока 8 спичек.

3. И наконец из первой кучки переложить во вторую столько спичек, сколько в этой второй кучке имелось, — во второй кучке стало 28 спичек, притом что добавили в нее столько, сколько там на тот момент было. Значит, во второй кучке изначально было 28 : 2 = 14 (спичек), а в первой — 8 + 14 = 22 (спички). В третьей кучке 12 спичек.

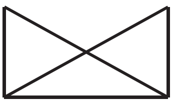
Ответ: 22, 14 и 12 спичек было в кучках первоначально».

К а т я К н и ж к и н а: «В следующей задаче нужно хорошенько подумать.

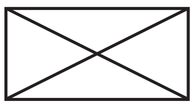
11. Расположите 6 спичек так, чтобы получилось 4 треугольника».

Задачи Васи Задачкина на вычерчивание фигур без отрыва карандаша от бумаги

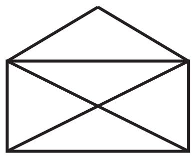
1. Какие из следующих фигур можно вычертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза по одной и той же линии? [17]



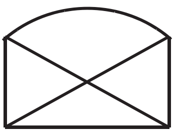
а)



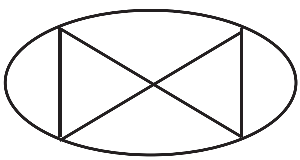
б)



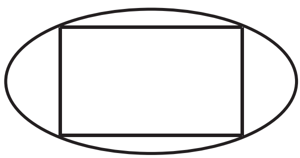
в)



г)

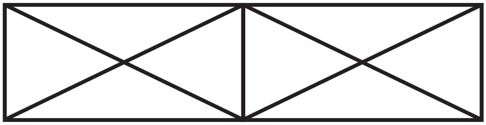


д)

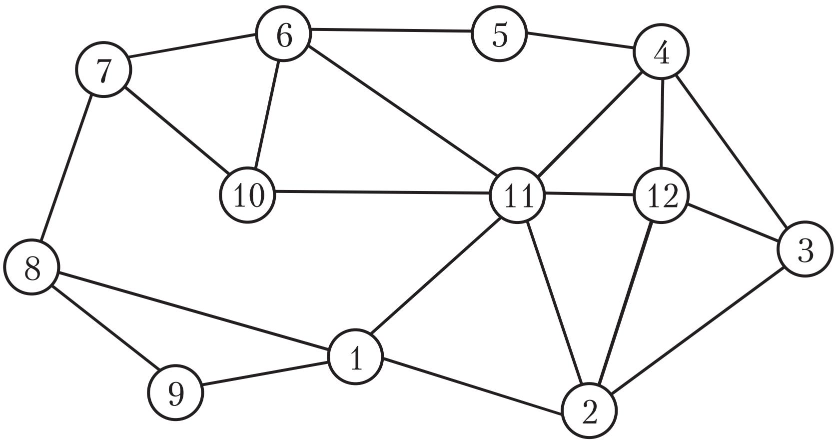


е)

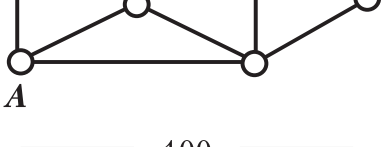
2. Можно ли из целого куска проволоки сделать данную фигуру?



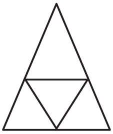
3. Считая, что перед вами план некоторого парка, выберите ту точку, из которой можно пройти по всем дорожкам парка и притом только по одному разу.

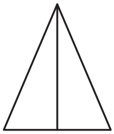


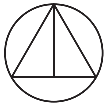
4. Перед вами план некоторого участка города. Вы находитесь в точке *A* и вам необходимо пройти по всем улицам, изображенным на плане, и вернуться в точку *A*. Возможно ли это сделать?

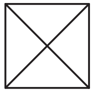


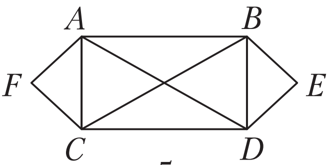
5. Попытайтесь нарисовать одним росчерком каждую из следующих семи фигур. Помните требования: начертить все линии заданной фигуры, не отрывая карандаша от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды ни одной линии.


1

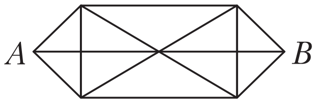

2


3

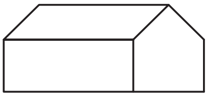

4



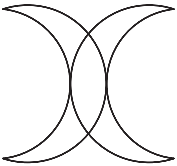
5

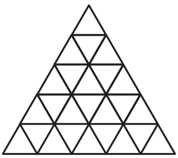


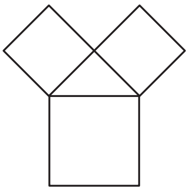
6

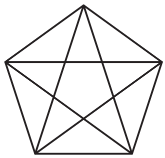

7

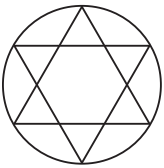
6. Начертите одним росчерком следующие фигуры:

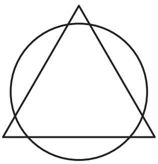

8

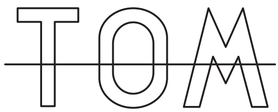

9


10


11


12


13



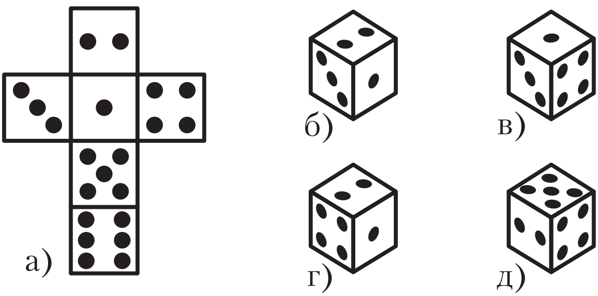
14

Простейшие многогранники

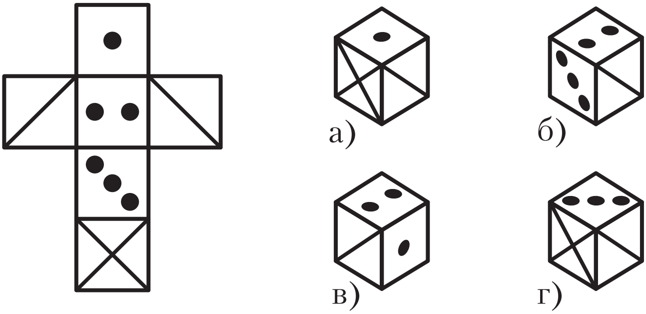
Петя Вопросов: «Вы часто играли в детские игры, где ходы производились в соответствии с количеством точек, которые выпали на брошенном вами кубике. Игральный кубик — это куб, на поверхность которого нанесены точки. Вы помните, что на каждой из поверхностей кубика свое количество точек от одной до шести. Обратите внимание, что суммы очков (точек) на противоположных гранях кубика равны семи. А знаете, почему для игры удобно использовать именно куб. Потому что когда мы бросаем игральный кубик, то для всех граней обеспечиваются равные возможности оказаться верхней. Такие же возможности будут и у других пяти видов фигур, которые являются правильными многогранниками, но куб легче изготовить и при бросании он покатится лучше. Эти многогранники вы будете изучать в старших классах. А пока вам известен только один из них — куб, или гексаэдр».

Упражнения Васи Задачкина

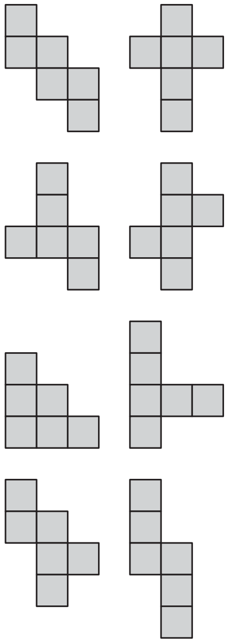
1. На рисунках показаны развертка и изображения кубиков. Какие из них могут соответствовать игральным кубикам?



2. Выберите кубик, соответствующий данной развертке.



3. Из фигур на рисунке к задаче выберите те, которые являются развертками куба. Начертите разверстку куба со стороной 5 см на листе плотной бумаги. Вырежьте, оставляя полоски для склеивания, выкройку и склейте куб.



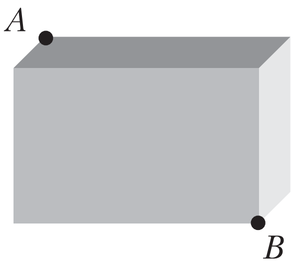
4. Имеется лист цветной бумаги прямоугольной формы. Ширина листа 10 см, а длина 12 см. Хватит ли этой бумаги для оклеивания куба, который у вас получился в предыдущем задании?

5. Представьте, что модель куба нужно было сделать из проволоки. Какой длины проволока понадобилась бы для изготовления куба с ребром 5 см?

6. Дан куб с ребром 5 см. Какое будет кратчайшее расстояние по поверхности куба от одной вершины до противоположной?

Подсказка. Можно воспользоваться моделью изготовленного куба.

7. Начертите развертку данного прямоугольного параллелепипеда с длиной 4 см, шириной 2 см и высотой 3 см. На данном чертеже и на построенной развертке (верхнюю и переднюю грани на развертке начертите соседними) покажите кратчайшее расстояние от A до B.



8. Комната имеет форму куба. В верхнем углу, у потолка, сидит паук, а в противоположном углу внизу, у пола, — муха. Каким кратчайшим путем должен ползти паук, чтобы добраться до мухи?

9. Имеются кубики с ребром (стороной) 1 см. Сколько нужно таких кубиков, чтобы из них сложить куб с ребром 2 см?

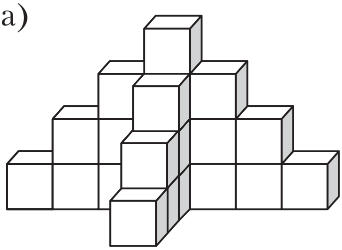
10. Имеются два кирпича обычной формы, сделанные из одного материала. Масса одного из них 5 кг. Какова масса другого кирпича, если все его размеры в 5 раз меньше?

11. Куб составлен из 8 одинаковых кубиков. Сравните объемы и площади поверхностей большого куба и 8 одинаковых кубиков.

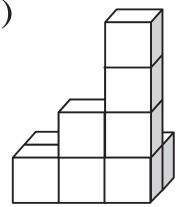
12. Из одного и того же материала изготовлено четыре сплошных куба с различными ребрами: 6 см, 8 см, 10 см и 12 см. Надо разместить их на весах так, чтобы чашки были в равновесии. Какие кубы или какой куб положите вы на одну чашку весов и какие (или какой) — на другую?

13. Изображенные на рисунке тела состоят из кубиков. Сколько кубиков в каждом из них?

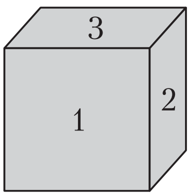
а)



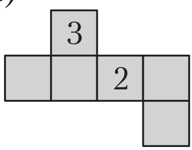
б)



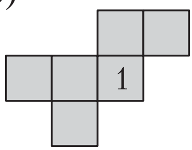
14. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2 и 3, а на развертках — два из названных чисел или одно. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.



а)

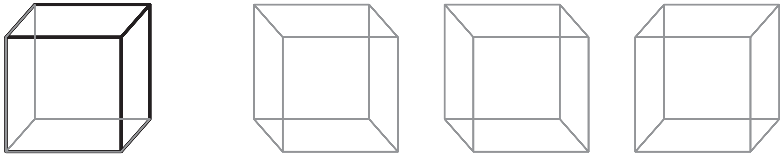


б)



15. Пунктирными линиями на рисунке обозначены невидимые ребра куба. Соответственно, сплошными линиями показаны видимые линии. Мы смотрели на куб справа сверху. На рисунках а), б), в) проведите сплошные линии так, чтобы куб был виден:

а) справа снизу; б) слева сверху; в) слева снизу.



а) б) в)

В а с я З а д а ч к и н: «Ребята, давайте поиграем в геометрические игры-головоломки. К таким играм относятся «Танграм», «Волшебный круг», «Пентамино» и т. д. В этих играх необходимо сложить силуэты из всех частей, на которые разрезана данная фигура. Играть можно одному, а можно с друзьями, устроив соревнование между командами. Побеждает тот, кто скорее составит предлагаемую фигуру. Заготовки для проведения игры вы легко можете выполнить из цветного картона, используя рисунки в приложении.

«Танграм» — древняя китайская игра. Квадрат разрезается на пять прямоугольных треугольников разных размеров (два больших, один средний, два маленьких), квадрат, который может быть составлен из двух маленьких треугольников, и параллелограмм, площадь которого равна площади квадрата. Задача играющих заключается в составлении различных силуэтов, обязательно из всех частей разрезанного квадрата. На рисунке в приложении показано, как необходимо разрезать квадрат и какие фигуры из полученных частей нужно сложить.

«Волшебный круг». Круг делится на десять частей, как показано на рисунке в приложении. В составлении заданных фигур должны быть использованы все части круга.

В этих играх можно самим разработать интересные фигуры.

«Пентамино». Прямоугольник делится на 12 частей, как показано на рисунке в приложении. Из всех полученных частей необходимо составить представленные силуэты [9]».

Тема 8 Тропинкой в страну обыкновенных дробей

Занятия 1—4. Что мы знаем об обыкновенных дробях? История возникновения обыкновенных дробей. Занимательные истории об обыкновенных дробях. Числа-лилипуты. Различные способы вычисления с обыкновенными дробями. Занимательные задания по теме.

Катя Книжкина: «Сегодня я расскажу вам об обыкновенных дробях. Мне удалось подобрать для вас в библиотеке много интересного материала.

Дроби появились в глубокой древности. Необходимость в дробных числах возникла у человека при разделе добычи, когда количество добытого не делилось нацело на число охотников, а также при измерениях величин, когда результат измерения не удавалось выразить натуральным числом. Таким образом, приходилось учитывать части меры, и людям стали необходимы дроби.

В истории развития дробных чисел встречаются дроби трех видов:

1) единичные дроби или доли (дроби с числителем, равным 1);

2) систематические дроби (дроби, у которых числителями могут быть числа любого вида, а знаменателями — только числа некоторого частного вида, например степени десяти или шестидесяти);

3) дроби общего вида (числители и знаменатели могут быть числами любого вида)».

Петя Вопросов: «Как же появились и развивались обыкновенные дроби?»

Катя Книжкина: «Все народы нашей планеты употребляли «половинки», «трети», «четвертушки» и т. д., причем у каждого народа для них были свои обозначения. Вслед за этим в разные эпохи и у разных народов стали появляться различные виды дробей. Первыми появились единичные дроби, у которых сначала были маленькие знаменатели, а затем и большие. Появились они в Древнем Египте, но дальше в развитии арифметики дробных чисел египтяне не пошли.

Древние египтяне уже знали, как разделить 2 предмета на троих. Для полученного числа $\frac{2}{3}$ у них был специальный значок, это была единственная дробь в обиходе египетских писцов, у которой в числителе не стояла единица, — все остальные дроби непременно имели в числителе единицу. Дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, называют египетскими (единичными или основными). Если египтянину нужно было использовать другие дроби, он представлял их в виде суммы основных дробей. Например, вместо $\frac{9}{20}$ писали $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$».

П е т я В о п р о с о в: «Катя, как это стало известно?»

К а т я К н и ж к и н а: «Наши представления о том, как использовались дроби в Древнем Египте, основаны на содержании папирусного свитка, который называют папирусом Ринда (по имени обнаружившего его в 1858 г. в Луксоре Генриха Ринде). Сейчас этот свиток находится в Лондоне. Автором папируса был Ахмес, записи датированы 1650 г. до н. э. и содержат информацию о том, какие дроби использовались в Древнем Египте и как производили вычисления. Предположительно, этот папирус является пособием, которое составил учитель для подготовки будущих придворных писцов. Ахмес в своей рукописи предлагал упражнения, головоломки, а также ясно изложенные решения».

В а с я З а д а ч к и н: «Я познакомлю вас с задачей из папируса Ахмеса.

Разделить 7 хлебов между 8 людьми.

Если резать каждый хлеб на 8 частей, а для этого нужно сделать 7 разрезов, то всего для разрезания 7 хлебов придется провести 49 разрезов. Это очень неудобно».

К а т я К н и ж к и н а: «А египтяне эту задача решали так: дробь $\frac{7}{8}$ записывали в виде суммы основных дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Значит, каждому человеку надо дать полхлеба, четверть хлеба и восьмушку хлеба, поэтому четыре хлеба разрезали пополам, два хлеба — на 4 части и один хлеб — на 8 частей, после чего каждому дали его часть. Получилось, что нужно сделать всего 17 (4 + 6 + 7) разрезов. Мы видим, что египетский способ решения в некоторых случаях удобен.

Египетские дроби складывать было неудобно, потому что при сложении двух одинаковых дробей появляется дробь вида $\frac{2}{n}$, а таких дробей египтяне не допускали. Когда в результате получалась любая не основная дробь, ее заменяли суммой основных дробей, что было очень трудоемким делом. Например, $\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$, $\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$. Поэтому египтяне составляли таблицы представления обыкновенных дробей в виде сумм основных, только знаки сложения не писали. Этот египетский способ мы тоже используем, когда записываем смешанное число. Например, $3\frac{1}{2}$ мы записываем без знака «+». В древнем папирусе Ахмеса содержится таблица, в которой все дроби вида $\frac{2}{n}$ от $\frac{2}{5}$ до $\frac{2}{99}$ записаны в виде суммы единичных дробей. Эти таблицы изготавливались для длительного применения, ими пользовались писцы и ученики, обучающиеся математике. В большинстве случаев для представления правильной дроби в виде суммы основных дробей достаточно уметь раскладывать в такую сумму дроби вида $\frac{2}{n}$».

Петя Вопросов: «Катя, было бы понятней, если все сказанное проиллюстрировать на примерах».

В а с я З а д а ч к и н: «Я покажу на примере, как можно представить в виде суммы единичных дробей дробь $\frac{7}{25}$, используя дроби вида $\frac{2}{n}$.

Например, $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, $\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$, $\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$, тогда дробь $\frac{7}{25}$ можно представить:

$$\frac{7}{25}=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{25}=\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{2}{15}+\frac{2}{75}=$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}+\frac{1}{150}.$$

Разложение произвольной дроби в сумму основных дробей не единственно.

Например, $\frac{3}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{75}=\frac{1}{10}+\frac{1}{50}$».

К а т я К н и ж к и н а: «Египтяне умели также умножать и делить дроби. Но для умножения приходилось умножать доли на доли, а потом, возможно, опять использовать таблицу. Еще сложнее обстояло дело с делением.

Египетские способы вычислений при помощи основных дробей перешли к грекам во времена Пифагора и остались в греческой истории в практической деятельности. Арабы переняли единичные дроби у греков, а от них единичные (основные или египетские) дроби попали в Европу».

В а с я З а д а ч к и н: «Современную систему записи дробей с числителем и знаменателем создали в Индии в первые века нашего летоисчисления. Только там писали знаменатель сверху, а числитель снизу и не писали дробной черты. А записывать дроби так, как записываются они сейчас, стали арабы. Индусы ввели современные правила действий над обыкновенными дробями. Затем эти правила стали использовать в Европе. Работать с обыкновенными дробями было трудно, поэтому голландский математик Симон Стевин предложил перейти к десятичным дробям, их вы будете изучать в 6-м классе».

К а т я К н и ж к и н а: «А сейчас рассмотрим следующие полезные приемы умножения:

Умножение на $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, *75, 125 и т. д.*

а) Чтобы умножить число на $1\frac{1}{2}$, достаточно к этому числу прибавить его половину.

Например:

$$346 \cdot 1\frac{1}{2} = 346 + 173 = 519.$$

б) Так как $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, то для умножения числа на $\frac{3}{4}$ достаточно из этого числа вычесть его четверть».

В а с я З а д а ч к и н: «Например:

$$824 \cdot \frac{3}{4} = 824 - 206 = 618».$$

в) Чтобы число умножить на 75, нужно его умножить на 100, найти четвертую часть результата и отнять ее от этого результата (так как $75 = 100 \cdot (1 - \frac{1}{4})$).

Например:

$$248 \cdot 75 = 24\,800 - 6200 = 18\,600.$$

г) Так как $125 = 100\left(1 + \frac{1}{4}\right)$, то для умножения числа на 125 достаточно его умножить на 100 и прибавить четверть полученного результата.

$$349 \cdot 125 = 34\,900 + 8725 = 43\,625».$$

Петя Вопросов: «Катя, расскажи, пожалуйста, о *числах-лилипутах*».

Катя Книжкина: «Если мы разделим 1 см на 10 равных частей, то получим отрезок в 1 мм, он нам будет казаться очень маленьким. Этот отрезок составляет $\frac{1}{10}$ часть отрезка в 1 см. Если теперь разделить этот отрезок опять на 10 равных частей, что сделать очень трудно, получим отрезок, в 10 раз меньший. Он будет составлять $\frac{1}{10}$ часть второго отрезка и $\frac{1}{100}$ часть первоначального. Длина этого отрезка очень маленькая, маленьким будет и число, выражающее длину этого отрезка. Если продолжить процесс деления и, получая каждый раз в десять раз меньший отрезок, делить его опять на десять равных частей, то длины полученных отрезков будут соответственно выражаться числами: $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{1\,000\,000}, \ldots$.

Эти числа очень малы, но они нужны и их используют не меньше, чем числа-великаны. Например, в миллиметрах можно измерять толщину тетради или толщину листа картона. Но для измерения размеров бактерий миллиметры не подойдут. Для этих целей используют микрон (микрометр) — $\frac{1}{1\,000\,000}$ часть метра или $\frac{1}{1000}$ часть миллиметра. Микрон в 1000 раз меньше миллиметра. Числа-лилипуты встречаются не только при нахождении размеров. За время $\frac{1}{1000}$ с звук распространяется на 33 см, а пуля, которая летит со скоростью 700 – 800 $\frac{м}{с}$, пролетит 70 см. Земной шар за это время перемещается вокруг Солнца на 30 м, а комар успевает взмахнуть вверх и вниз своими крылышками. Дробь $\frac{1}{1\,000\,000}$ маленькая, но для современных физиков $\frac{1}{1\,000\,000}$ с совсем не маленький промежуток. Например, световой луч 300 м «пробегает» со скоростью 300 000 $\frac{км}{с}$ за $\frac{1}{1\,000\,000}$ с.

Мы видим, что числа-лилипуты очень востребованы. Среди этих чисел есть свои великаны и карлики, например числа лилипуты $\frac{1}{100\,000}$ и $\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000}$. Первое из этих чисел в 1 000 000 000 раз больше другого и является великаном по отношению к нему, а второе число является карликом по отношению к первому».

Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого

Капитан на вопрос, сколько имеет в команде своей людей, отвечал, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ — в работе, $\frac{1}{4}$ — в лазарете да 27 — налицо. Спрашивается число людей его команды.

Решение.

1. $\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{131}{140}$ — такая часть команды чем-либо занята.

2. $1-\frac{131}{140}=\frac{9}{140}$ — такая часть всей команды налицо, т. е. составляет 27 человек.

3. Значит, на $\frac{1}{140}$ часть команды приходится 3 человека.

4. $3 \cdot 140 = 420$ человек составляет всю команду.

Ответ: 420 человек.

Контрольные вопросы Пети Вопросова

1. Какие дроби использовали в Древнем Египте?

2. Как поступали египтяне, когда нужно было использовать другие дроби, отличные от основных дробей?

3. Кто ввел современную систему записи дробей с числителем и знаменателем?

4. Как усовершенствовали запись обыкновенных дробей арабы?

5. Что больше: $\frac{1}{100}$ или $\frac{1}{10\,000}$ и во сколько раз?

6. Может ли дробь, у которой числитель меньше знаменателя, равняться дроби, у которой числитель больше знаменателя?

7. Назовите большее из чисел и меньшее из них: $\frac{1}{1\,000\,000}$, $\frac{2}{999\,999}$, $\frac{3}{88\,888}$.

8. Какую часть микрон составляет от метра; от сантиметра; от миллиметра?

9. Какую часть грамм составляет от килограмма; от тонны?

10. Как число умножить на $1\frac{1}{5}$, на 75, на 150?

Упражнения Васи Задачкина

1. Какую долю составляет лестница на второй этаж от лестницы на четвертый этаж этого же дома?

2. Что больше: $\frac{2}{3}$ или $\frac{4}{7}$?

3. Мальвина позаимствовала у Пьеро треть его яблок, а Буратино позаимствовал у Пьеро две пятых частей яблок. Кто позаимствовал больше?

4. Бременские музыканты на привале сварили в котелке картошку и уснули. Первым проснулся Осел и съел треть картошки. Вторым проснулся Пес, подумав, что проснулся первым, он тоже съел треть картошки. Затем проснулся Кот, подумав, что проснулся первым, съел треть остатка. В итоге в котелке остались 2 картофелины. Сколько картофеля сварили бременские музыканты?

5. Никита взял у Василия учебник на 3 дня. В первый день он прочитал половину, во второй — треть от оставшихся страниц, а количество страниц, прочитанных в третий день, равнялось половине числа страниц, изученных за первые два дня. Успел ли Никита прочесть книгу?

6. Семь одинаковых батонов надо поровну разделить между двенадцатью лицами. Как это сделать, не разрезая каждый батон на 12 частей?

7. Что больше: $\frac{2008}{2009}$ или $\frac{2009}{2010}$?

8. Что больше: $\frac{2}{5}$ от числа 25 или $\frac{1}{3}$ от числа 27?

9. Найдите устно произведение трех чисел, если первое число составляет $\frac{3}{7}$ от числа 77, второе число составляет $\frac{5}{12}$ от числа 60, а третье число составляет треть от 120.

10. Половина — треть некоторого числа. Какое это число?

11. Половина от половины числа равна половине. Какое это число?

12. Найдите число, одна треть плюс одна четверть которого составляют 21.

13. Найдите число, полтрети которого есть число 100.

14. Найдите число, если $\frac{2}{5}$ от него есть $\frac{1}{6}$ от числа 240.

15. Даны числа: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Вставьте между ними 5 каких-нибудь чисел так, чтобы они вместе с данными числами шли в порядке возрастания.

16. Решите задачу, которая предлагалась учителем Древнего Египта: «Столько и еще четверть столько — вместе 15».

17. Какую дробь Ахмес записал $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$?

18. Как записать дробь $\frac{11}{12}$ в виде суммы дробей с числителями 1 и разными знаменателями?

19. Задача из папируса Ринда: «Найдите число, если известно, что от прибавления к нему $\frac{2}{3}$ его и вычитания из полученной суммы ее трети получается число 10».

20. В выражении $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$ расставьте, если нужно, скобки так, чтобы результат был: а) минимальным; б) максимальным.

21. Напишите возможно меньшее натуральное число, пользуясь тремя двойками и знаками действий.

22. Три брата хотели купить новый дом. Условились, что первый даст половину, второй — треть, третий — шестую часть стоимости дома. Смогут ли братья купить дом?

23. Три девочки решили купить книгу. Условились, что первая девочка даст половину нужной суммы, вторая — четвертую часть, а третья — третью часть. Смогут ли девочки купить книгу?

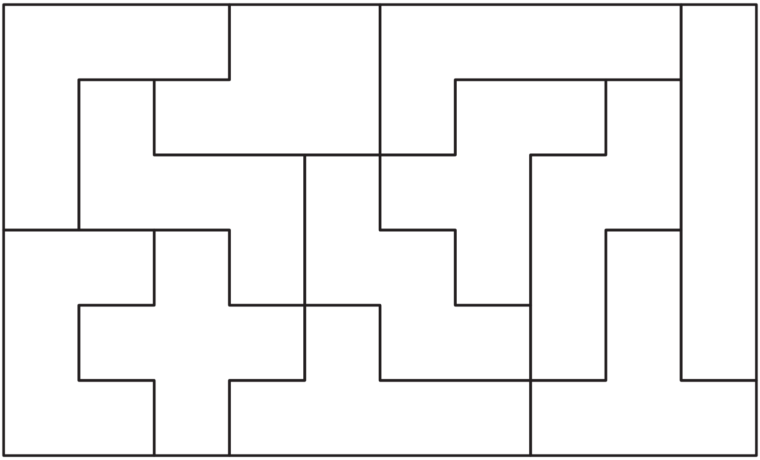
24. Трое рабочих копали колодец. Первый выкопал половину нужной глубины, второй — четвертую часть, третий — пятую часть. Смогли ли рабочие выкопать колодец нужной глубины?

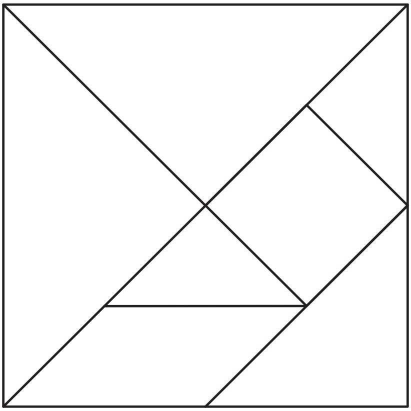
25. Эта задача насчитывает много сотен лет, но до сих пор поражает воображение своей красотой и неожиданностью.

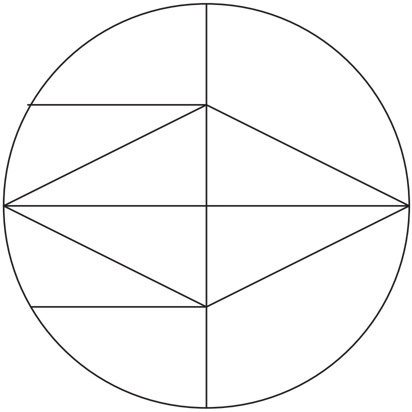
Три брата получили в наследство от отца 17 верблюдов. Старшему отец завещал половину стада, среднему — треть, а младшему — девятую часть. Братья пытались поделить наследство и выяснили, что старшему брату придется взять 8 верблюдов и кусок верблюда, среднему — 5 верблюдов и кусок верблюда, а младшему — верблюда и кусок верблюда. Естественно, разрезать верблюдов не хотелось никому, и братья решили попросить помощи у Мудреца, проезжавшего мимо них на верблюде. Мудрец спешился и присоединил своего верблюда к стаду братьев. От нового стада из 18 верблюдов Мудрец отделил половину — 9 верблюдов для старшего брата, затем треть — 6 верблюдов для среднего брата и наконец девятую часть — 2 верблюдов для младшего брата. После успешной дележки Мудрец сел на своего верблюда и продолжил путь. А братья стали думать, почему же каждый из них получил больше верблюдов, чем полагалось. Сможете ли вы объяснить, что же произошло?

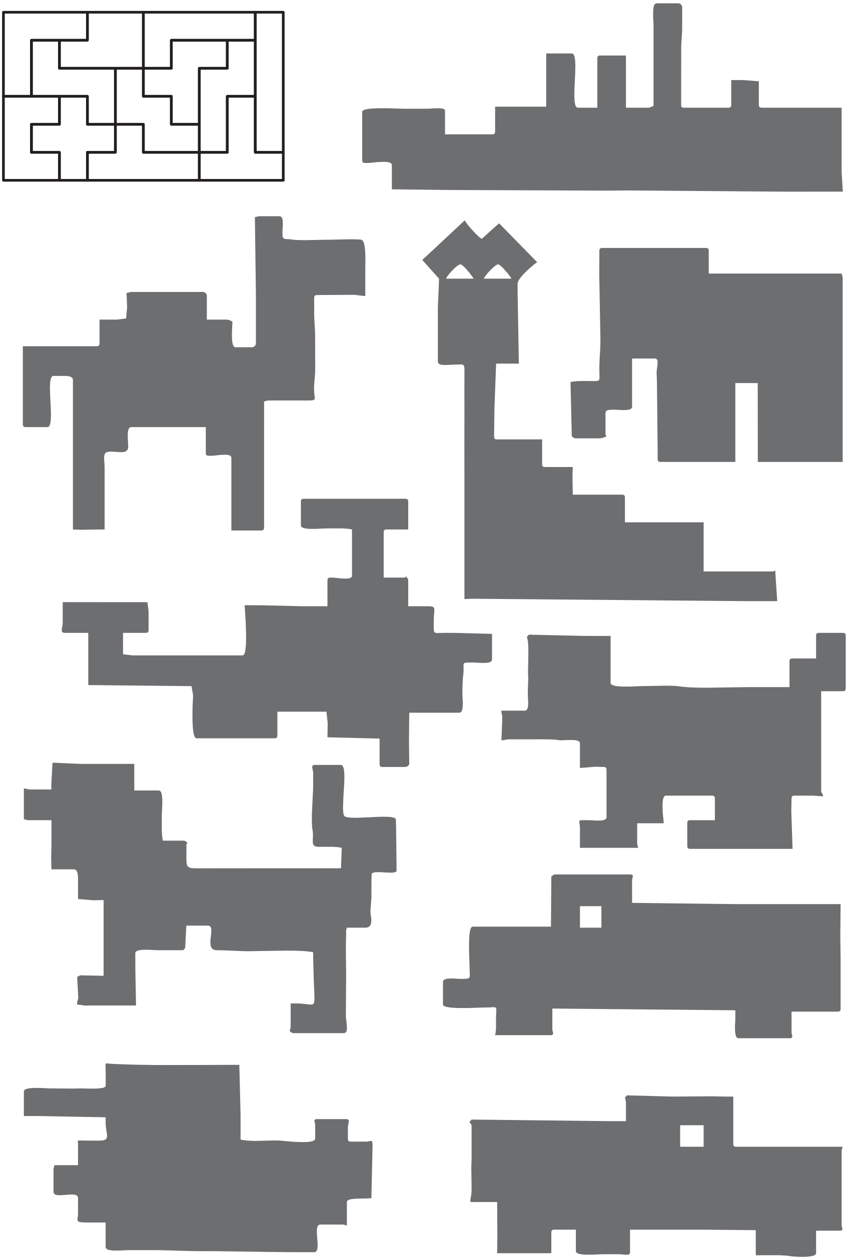
26. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

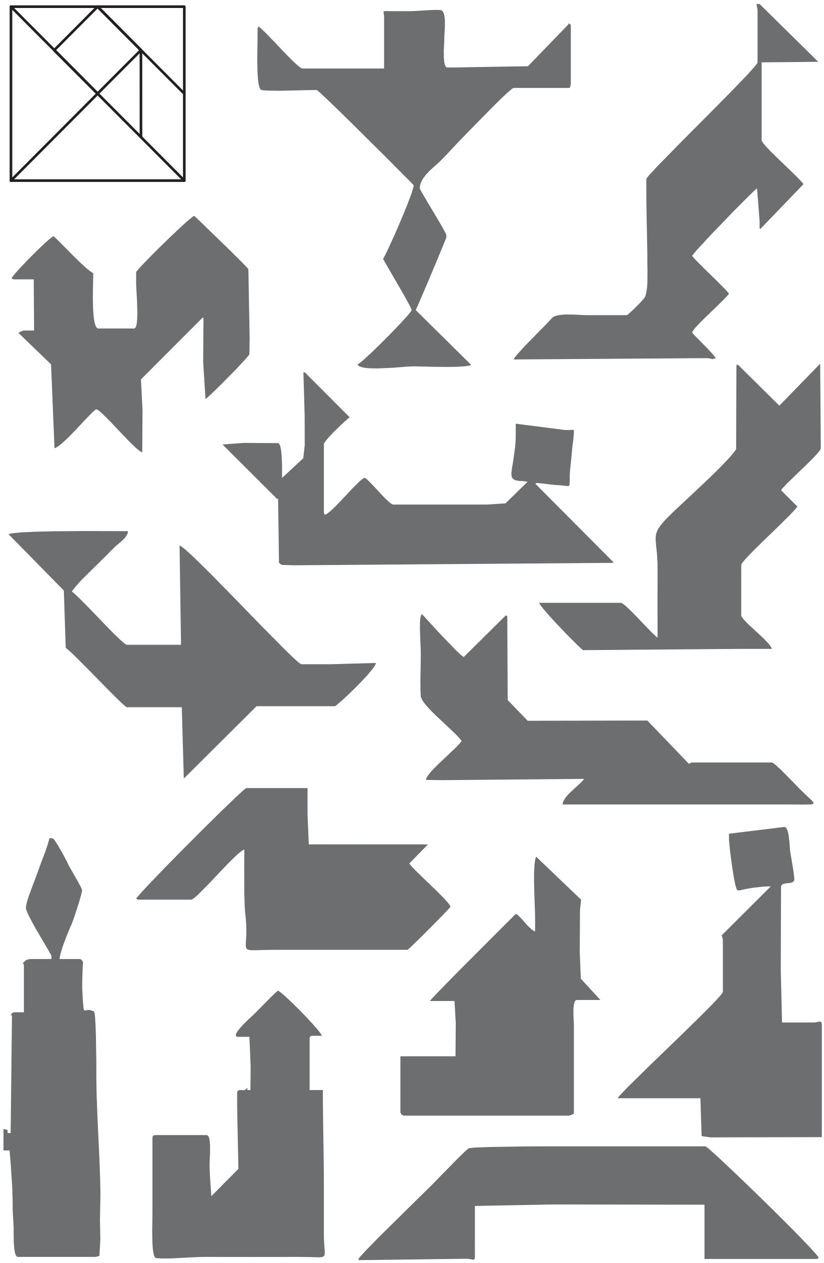
27. Пильщики распиливают бревно на метровые отрубки. Длина бревна 5 м. На одну распиловку затрачивается каждый раз $1\frac{1}{2}$ минуты. За сколько минут распилят пильщики все бревно?



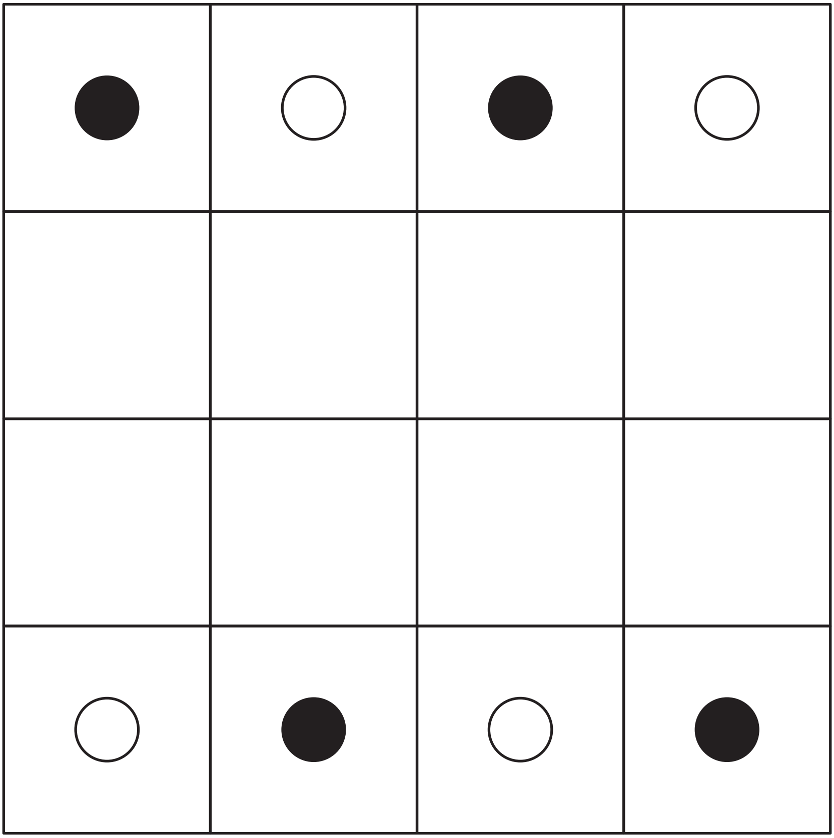




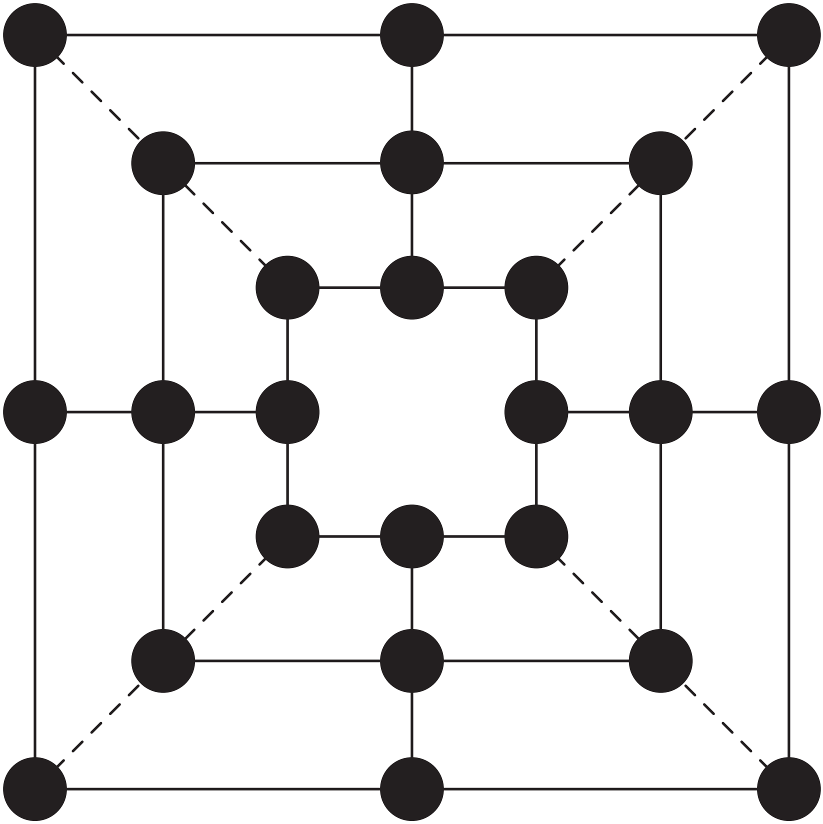




Поле 1
Игра «Так-тикль»



Поле 2
Игра «Мельница»



Рекомендуемая литература

1. *Александрова, Э. Б.* Стол находок утерянных чисел / Э. Б. Александрова, В. А. Левшин. — М. : Детская литература, 1988. — 63 с.

2. *Аменицкий, Н. Н.* Забавная арифметика / Н. Н. Аменицкий, И. П. Сахаров. — М. : Наука, 1991. — 125 с.

3. *Баврин, И. И.* Старинные задачи : кн. для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М. : Просвещение, 1994. — 128 с.

4. Б.А.Д. Бал у принцессы арифметики // Квант. — 1974. — № 7. — С. 66—68.

5. *Балк, М. Б.* Математика после уроков / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. — М. : Просвещение, 1971. — 464 с.

6. *Беррондо, М.* Занимательные задачи / М. Беррондо ; пер. с фр. Ю. Н. Сударева ; под ред. И. М. Яглома. — М. : Мир, 1983. — 229 с.

7. *Болгарский, Б. В.* Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский ; под ред. В. Д. Чистякова. — Минск : Вышэйш. школа, 1974. — 288 с.

8. *Виленкин, Н. Я.* Тайны бесконечности / Н. Я. Виленкин // Квант. — 1970. — № 3. — С. 3—13.

9. Вырежи и сложи: игры-головоломки / сост. З. А. Михайлова, Р. Л. Непомнящая. — Минск : Нар. асвета, 1992. — 179 с.

10. *Волина, В. В.* Мир математики / В. В. Волина. — Ростов н/Д : Феникс, 1999. — 508 с.

11. *Ганчив, И.* Математический фольклор / И. Ганчив, К. Чимев, Й. Стоянов. — М. : Знание, 1987. — 205 с.

12. *Депман, И. Я.* Рассказы о математике / И. Я. Депман. — Л. : Детгиз, 1957. — 142 с.

13. *Депман, И. Я.* Рассказы о решении задач / И. Я. Депман. — Л. : Детская литература, 1957. — 127 с.

14. *Депман, И. Я.* Совершенные числа / И. Я. Депман // Квант. — 1971. — № 8. — С. 1—6.

15. *Депман, И. Я.* История арифметики / И. Я. Депман. — М. : Просвещение, 1965. — 415 с.

16. *Дорофеева, А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева // Квантор. — 1991. — 97 с.

17. *Игнатьев, Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М. : Наука, 1978. — 190 с.

18. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — Т. 1. — М. : Наука, 1970. — 350 с.

19. *Кордемский, Б. А.* Удивительный мир чисел / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М. : Просвещение, 1986. — 143 с.

20. *Кордемский, Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М. : Физматлит, 1958. — 574 с.

21. *Козлова, Е. Г.* Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка / Е. Г. Козлова. — М. : МИРОС, 1994. — 128 с.

22. *Левинова, Л. А.* Приключения Кубарика и Томика, или Веселая математика / Л. А. Левинова, Г. В. Сангир. — М. : Педагогика, 1975. — 160 с.

23. *Левшин, В. А.* Магистр Рассеянных Наук / В. А. Левшин. — М. : Московский клуб, 1994. — 256 с.

24. *Леман, И.* Увлекательная математика / И. Леман ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Знание, 1985. — 270 с.

25. *Леман, И.* 2×2 + шутка / И. Леман. — Минск : Народная асвета, 1985. — 71 с.

26. *Лоповок, А. М.* Математика на досуге / А. М. Лоповок. — М. : Просвещение, 1981. — 158 с.

27. *Мазаник, А. А.* Реши сам / А. А. Мазаник. — Минск : Народная асвета, 1980. — 240 с.

28. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М. : Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с.

29. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1984. — 160 с.

30. *Олехник, С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехин, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потаров. — М. : Наука, 1985. — 160 с.

31. *Перельман, Я. И.* Занимательная арифметика / Я. И. Перельман. — М. : Физматгиз, 1959. — 190 с.

32. *Перельман, Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1978. — 160 с.

33. *Перли, С. С.* Страницы русской истории на уроках математики : нетрадиц. задачник: 5—6 кл. / С. С. Перли, Б. С. Перли. — М. : Педагогика-Пресс, 1994. — 287 с.

34. Час веселой математики: Задачи на сказочные сюжеты, смекалку, сообразительность / авт.-сост. Л. К. Круз. — Мозырь : ИД «Белый Ветер», 2001. — 28 с.

35. *Чистяков, В. С.* Старинные задачи по элементарной математике / В. С. Чистяков. — Минск : Вышэйш. школа, 1978. — 270 с.

36. *Чопенко, О. П.* Про счеты / О. П. Чопенко // Квант. — 1975. — № 5. — С. 72—75.

37. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. — М. : Педагогика, 1989. — 352 с.

38. Я познаю мир : дет. энцикл.: Математика / авт.-сост. А. П. Савин, В. В. Стацко, А. Ю. Котова. — М. : ООО «Изд-во АСТ»: ООО «Изд-во Астрель», 2002. — 475 с.

Содержание